§4 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt

Trong không gian cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q).

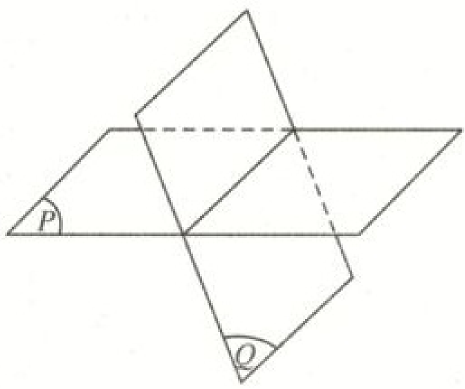
$\boxed{?1}$ *Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có thể có ba điểm chung không thẳng hàng hay không ?*

$\boxed{?2}$ *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) có một điểm chung thì chúng có bao nhiêu điểm chung ? Các điểm chung đó có tính chất như thế nào ?*

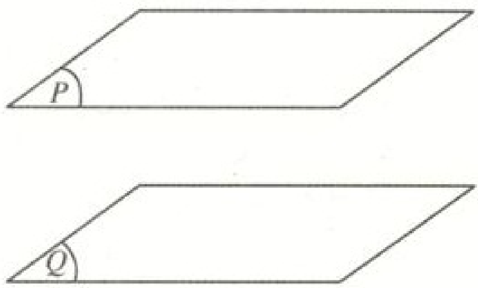
Như vậy khi cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q), có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau đây :

a) (P) và (Q) có điểm chung. Khi đó ta biết rằng (P) và (Q) cắt nhau theo một đường thẳng (h.61a).

b) (P) và (Q) không có điểm chung. Trong trường hợp này, ta nói chúng *song song với nhau* (hoặc *song song*) (h.61b) và kí hiệu $(P) \,/\!/\, (Q)$, hay $(Q) \,/\!/\, (P)$.



a)



b)

Hình 61

ĐỊNH NGHĨA

> *Hai mặt phẳng gọi là **song song** nếu chúng không có điểm chung.*

Trong thực tế, chúng ta thường gặp hình ảnh của những mặt phẳng song song : các bậc cầu thang (h.62a), hai mặt đối diện của hộp diêm (h.62b), ...

a)

b)

Hình 62

2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Trong không gian cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q).

?3 *Khẳng định sau đây có đúng không ? Vì sao ?*

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trên (P) đều song song với (Q).

?4 *Khẳng định sau đây có đúng không ? Tại sao ?*

Nếu mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

Bây giờ, nếu chỉ biết trong mp(P) có hai đường thẳng cắt nhau và cùng song song với mp(Q) thì (P) có song song với (Q) hay không ? Định lí sau đây trả lời câu hỏi đó.

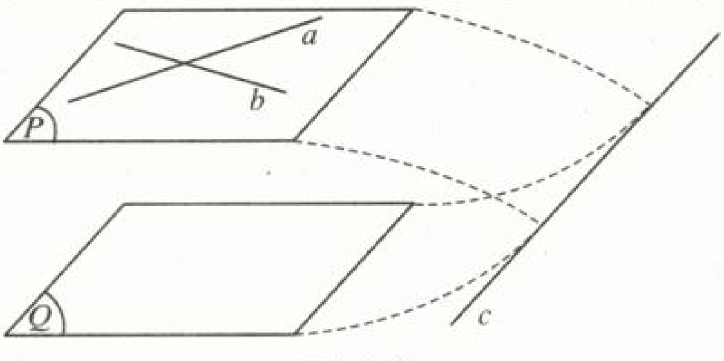
ĐỊNH LÍ 1

> *Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).*

1 (Để chứng minh định lí 1)

a) Hãy chứng tỏ rằng hai mặt phẳng (P) và (Q) không trùng nhau.

b) Giả sử (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến c. Hãy chứng tỏ rằng $a \parallel c$, $b \parallel c$ và do đó suy ra điều vô lí (h.63).



Hình 63

3. Tính chất

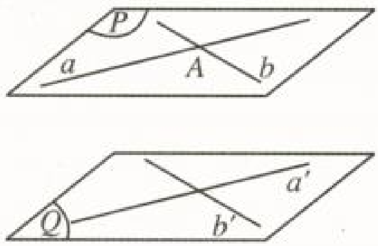
Ta biết rằng : Qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó. Bây giờ nếu ta thay cụm từ "đường thẳng" trong mệnh đề trên bởi cụm từ "mặt phẳng", ta cũng có các tính chất tương tự như sau :

Tính chất 1

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Chứng minh

Giả sử A là một điểm nằm ngoài mp(Q). Trên (Q), lấy hai đường thẳng a' và b' cắt nhau. Gọi a và b là hai đường thẳng qua A và lần lượt song song với a' và b' . Theo định lí 1, hai đường thẳng a và b xác định mp(P) song song với mp(Q) (h.64).



Hình 64

Giả sử (P') cũng là một mặt phẳng qua A và song song với (Q). Khi đó, (P') song song với a' và b', do đó (P') phải chứa a và b. Vậy (P) và (P') trùng nhau. □

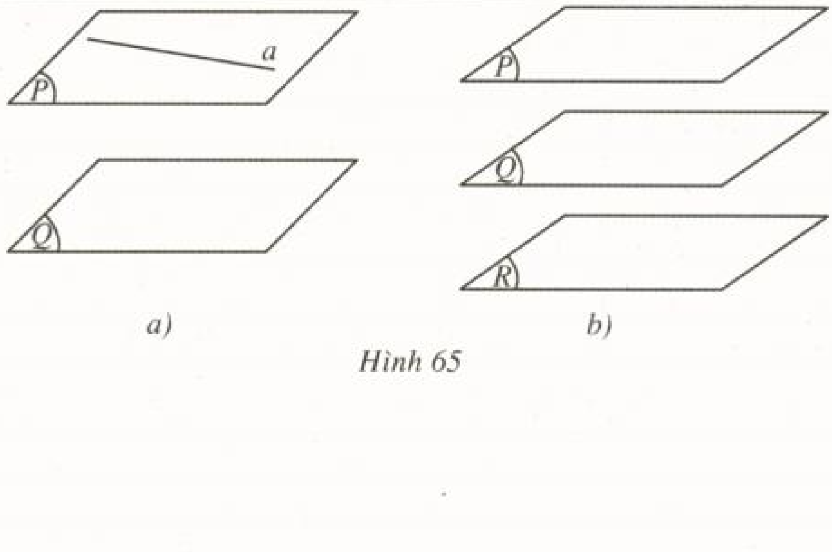
Từ tính chất trên, ta suy ra hai hệ quả sau (h.65)

HỆ QUẢ 1

Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (Q) thì có duy nhất một mặt phẳng (P) chứa a và song song với (Q).

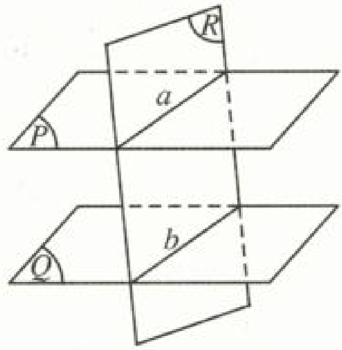
HỆ QUẢ 2

Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.



Hình 65

$\boxed{?5}$ *Cho mp(R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) lần lượt theo hai giao tuyến a và b. Hỏi a và b có điểm chung hay không ? Tại sao ? (h.66)*



Hình 66

Trả lời câu hỏi trên, ta được tính chất sau đây

Tính chất 2

> *Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mặt phẳng (R) đã cắt (P) thì phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.*

4. Định lí Ta-lét (Thalès) trong không gian

Thalès (624 - 547 TCN)

Ở cấp THCS, các em đã học định lí Ta-lét trong mặt phẳng nói về những đường thẳng song song. Bây giờ chúng ta sẽ học một định lí nói về những mặt phẳng song song cũng mang tên nhà toán học Hy Lạp : Ta-lét. Định lí ấy được phát biểu như sau

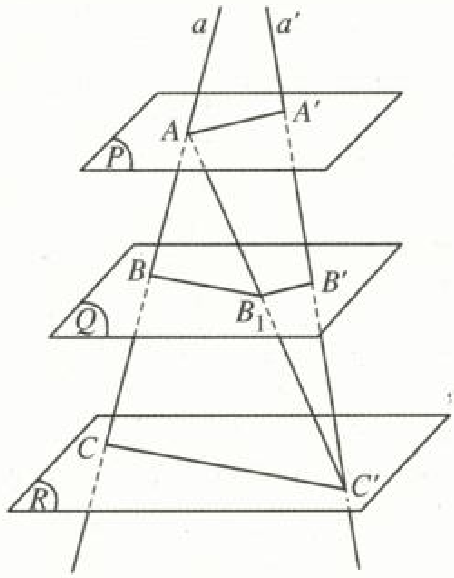
ĐỊNH LÍ 2 (Định lí Ta-lét)

> *Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

Định lí trên có nghĩa là : Nếu ba mặt phẳng đôi một song song (P), (Q), (R) cắt hai đường thẳng a và a' lần lượt tại A, B, C và A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Để chứng minh định lí, gọi B_1 là giao điểm của AC' và mp(Q) rồi áp dụng định lí Ta-lét trong mặt phẳng (ACC') và trong mặt phẳng $(C'AA')$.



Hình 67

Ta thừa nhận định lí sau đây, thường gọi là định lí Ta-lét đảo.

ĐỊNH LÍ 3 (Định lí Ta-lét đảo)

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và a'. Lấy các điểm phân biệt A, B, C trên a và A', B', C' trên a' sao cho

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Ví dụ

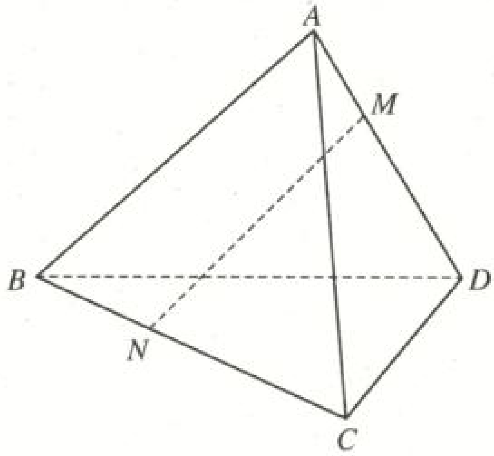
Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N theo thứ tự chạy trên các cạnh AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Giải (h.68)

Vì M, N lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AD và BC sao cho $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$ nên suy ra

$$\frac{MA}{NB} = \frac{MD}{NC} = \frac{AD}{BC}.$$

Vậy theo định lí Ta-lét đảo, các đường thẳng MN, AB, CD cùng song song với một mặt phẳng (P) nào đó. Ta có thể lấy mp(P) đi qua một điểm cố định, song song với AB và CD ; rõ ràng (P) cố định. □



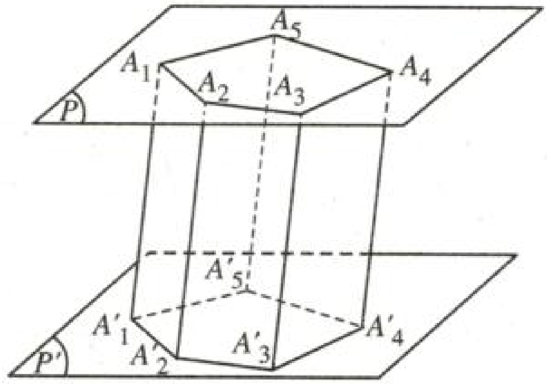
Hình 68

5. Hình lăng trụ và hình hộp

Trong cuộc sống hàng ngày, ta thường gặp nhiều đồ dùng, vật thể có hình dạng hình lăng trụ hay hình hộp như : hộp diêm, hộp phấn, cây thước, quyển sách, ...

Định nghĩa hình lăng trụ

Cho hai mặt phẳng (P) và (P') song song. Trên (P) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh A_1, A_2, ..., A_n, ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và lần lượt cắt mp(P') tại A'_1, A'_2, ..., A'_n (h.69). Dễ dàng thấy rằng các tứ giác $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ là những hình bình hành và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ có các cạnh tương ứng song song và bằng nhau.

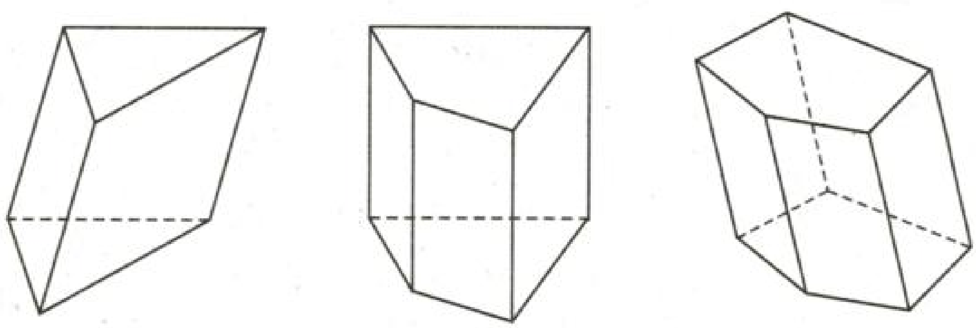


Hình 69

> *Hình hợp bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là **hình lăng trụ** hoặc **lăng trụ**, và kí hiệu là $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.*

Mỗi hình bình hành nói trên gọi là một ***mặt bên*** của hình lăng trụ. Hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hai ***mặt đáy*** của hình lăng trụ. Các cạnh của hai đa giác đó gọi là các ***cạnh đáy*** ; các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ gọi là các ***cạnh bên*** của hình lăng trụ. Các đỉnh của hai mặt đáy gọi là các ***đỉnh*** của hình lăng trụ.

Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì lăng trụ tương ứng được gọi là ***lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác*** (h.70).


a) Lăng trụ tam giác *b) Lăng trụ tứ giác* *c) Lăng trụ ngũ giác*

Hình 70

Sau đây, ta sẽ giới thiệu một dạng đặc biệt của hình lăng trụ, đó là hình hộp.

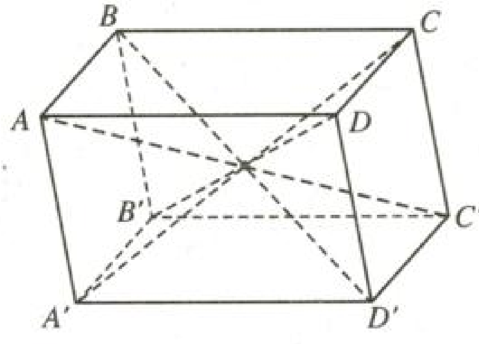
> *Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là **hình hộp**.*

Như vậy, hình hộp có sáu mặt (bốn mặt bên và hai mặt đáy) đều là những hình bình hành (h.71). Mỗi mặt có một mặt song song với nó. Hai mặt như thế gọi là ***hai mặt đối diện***.

?6 *Có thể xem hai mặt đối diện nào đó của hình hộp là hai mặt đáy của nó hay không ?*

Hình hộp có tám đỉnh, hai đỉnh của hình hộp gọi là ***hai đỉnh đối diện*** nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là ***đường chéo*** của hình hộp.

Hình 71 cho ta thấy hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cặp đỉnh đối diện là A và C', B và D', C và A', D và B', và có các đường chéo là AC', BD', CA', DB'.



Hình 71

Hình hộp có mười hai cạnh chia làm ba nhóm, mỗi nhóm gồm có bốn cạnh song song và bằng nhau. Hai cạnh gọi là ***hai cạnh đối diện*** nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên bất kì một mặt nào của hình hộp.

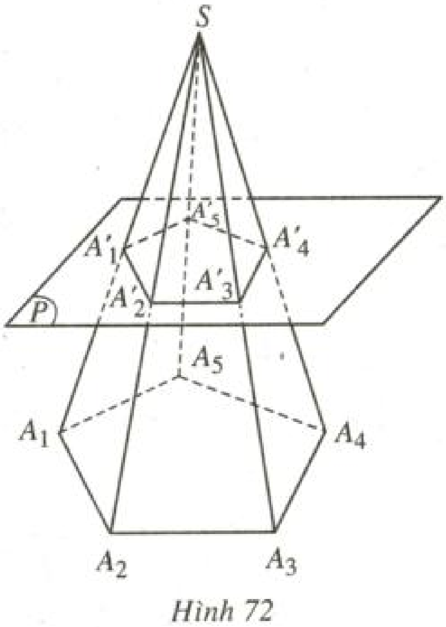
2

Chứng tỏ rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Điểm cắt nhau đó gọi là ***tâm của hình hộp***.

6. Hình chóp cụt

Định nghĩa

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình hợp bởi thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ và đáy $A_1A_2...A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là một ***hình chóp cụt***, kí hiệu là $A'_1A'_2...A'_n.A_1A_2...A_n$ (h.72).



Hình 72

Đáy của hình chóp gọi là ***đáy lớn*** của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là

đáy nhỏ của hình chóp cụt. Các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là các ***mặt bên*** của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ gọi là các ***cạnh bên*** của hình chóp cụt.

Tuỳ theo đáy là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ..., ta có ***hình chóp cụt tam giác, hình chóp cụt tứ giác, hình chóp cụt ngũ giác***, ...

Tính chất

Vì hình chóp cụt được cắt ra từ một hình chóp nên ta dễ dàng suy ra tính chất sau đây

> *Hình chóp cụt có :*
> *a) Hai đáy là hai đa giác có cạnh tương ứng song song và tỉ số các cạnh tương ứng bằng nhau.*
> *b) Các mặt bên là những hình thang.*
> *c) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.*

Câu hỏi và bài tập

29. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau ;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

c) Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia ;

d) Nếu hai mặt phẳng song song thì mỗi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng kia ;

e) Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì song song với nhau ;

f) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

30. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hình hộp là một hình lăng trụ ;

b) Hình lăng trụ có tất cả các cạnh song song ;

c) Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau ;

d) Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành ;

e) Hình hộp có các mặt đối diện bằng nhau.

31. Cho hai đường thẳng chéo nhau. Chứng minh rằng có đúng hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

32. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Chứng minh rằng nếu điểm M không nằm trên (P) và không nằm trên (Q) thì có duy nhất một đường thẳng đi qua M cắt cả a và b.

33. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Một mặt phẳng cắt a, b, c, d lần lượt tại bốn điểm A', B', C', D'. Chứng minh rằng $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

34. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB. Hỏi mặt phẳng (P) qua điểm M, song song với cả AD và BC có đi qua trung điểm N của CD không ? Tại sao ?

35. Cho hai điểm M, N lần lượt thay đổi trên hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn thẳng MN sao cho $\dfrac{IM}{IN} = k$, $k \neq 0$ cho trước.

36. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi H là trung điểm của cạnh $A'B'$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng CB' song song với mp(AHC').

b) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng $(AB'C')$ và $(A'BC)$. Chứng minh rằng d song song với mp$(BB'C'C)$.

c) Xác định thiết diện của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ khi cắt bởi mp(H, d).

37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh rằng

a) mp(BDA') // mp$(B'D'C)$;

b) Đường chéo AC' đi qua các trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác BDA' và $B'D'C$;

c) G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau ;

d) Các trung điểm của sáu cạnh BC, CD, DD', $D'A'$, $A'B'$, $B'B$ cùng nằm trên một mặt phẳng.

38. Chứng minh rằng tổng bình phương tất cả các đường chéo của một hình hộp bằng tổng bình phương tất cả các cạnh của hình hộp đó.

39. Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$ có đáy lớn ABC và các cạnh bên AA', BB', CC'. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và M', N', P' lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$. Chứng minh $MNP.M'N'P'$ là hình chóp cụt.