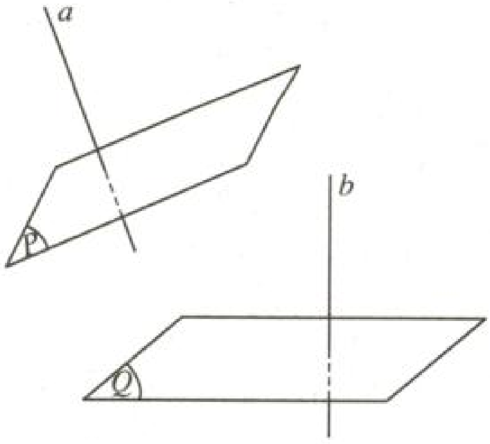
§4 HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Lấy hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với (P) và (Q) (h.108). Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a và b không phụ thuộc vào cách lựa chọn chúng và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q).



Hình 108

ĐỊNH NGHĨA 1

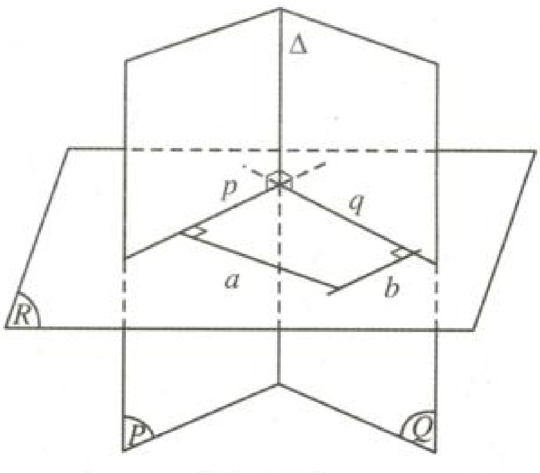
> ***Góc giữa hai mặt phẳng*** *là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.*

Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng

?1 *Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng bao nhiêu ?*

Bây giờ, giả sử (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Ta vẽ một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ và gọi p, q lần lượt là giao tuyến của (R) với (P) và (R) với (Q). Khi đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa p và q.

Thật vậy, trong mp(R), xét các đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với p và q thì $a \perp (P)$, $b \perp (Q)$ và dễ thấy góc giữa hai đường thẳng a, b bằng góc giữa hai đường thẳng p, q (h.109). Như vậy ta có :



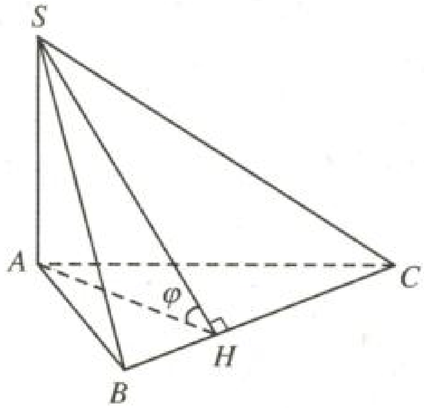
Hình 109

CHÚ Ý

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ, để tính góc giữa chúng, ta chỉ việc xét một mặt phẳng (R) vuông góc với Δ, lần lượt cắt (P) và (Q) theo các giao tuyến p và q. Lúc đó, góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng p, q.

Ví dụ

Cho hình chóp S.ABC có SA $\perp$ (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC). Chứng minh rằng $S_{ABC} = S_{SBC}.\cos\varphi$, ở đây kí hiệu S_{ABC} là diện tích tam giác ABC.



Hình 110

Giải (h.110)

Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Do $SA \perp \text{mp}(ABC)$ nên $SH \perp BC$. Suy ra $\widehat{SHA} = \varphi$ và $AH = SH.\cos\varphi$. Từ đó ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}BC.SH.\cos\varphi = S_{SBC}.\cos\varphi. \qquad \square$$

Mở rộng kết quả của ví dụ trên, ta có định lí tổng quát sau đây :

ĐỊNH LÍ 1

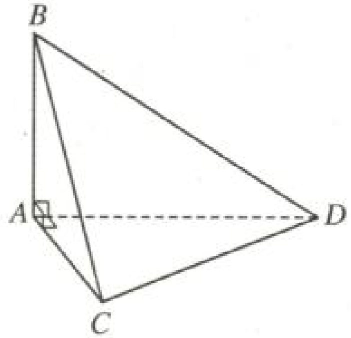
Gọi S là diện tích của đa giác $\mathscr{H}$ trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu $\mathscr{H}'$ của $\mathscr{H}$ trên mặt phẳng (P') thì $S' = S.\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

2. Hai mặt phẳng vuông góc

ĐỊNH NGHĨA 2

*Hai mặt phẳng gọi là **vuông góc với nhau** nếu góc giữa chúng bằng 90°.*

Khi hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì ta còn nói gọn là *hai mặt phẳng* (P) và (Q) *vuông góc*, kí hiệu $(P) \perp (Q)$ hay $(Q) \perp (P)$.



Hình 111

1

Cho hình tứ diện *ABCD* có *AB*, *AC*, *AD* đôi một vuông góc (h.111). Hãy chỉ ra các đường thẳng lần lượt vuông góc với các mặt phẳng (*ABC*), (*ACD*), (*ABD*) và từ đó suy ra các mặt phẳng ấy đôi một vuông góc.

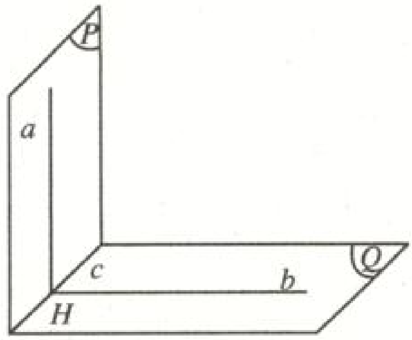
Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc

Định lí dưới đây nói về một điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

Chứng minh (h.112)



Hình 112

Giả sử (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng a mà a vuông góc với mp(Q). Gọi H là giao điểm của a và (Q) thì H thuộc giao tuyến c của (P) và (Q). Trong (Q), kẻ đường thẳng b đi qua H và vuông góc với c. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) chính là góc giữa a và b. Vì $a \perp (Q)$ nên $a \perp b$, từ đó suy ra hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. □

Ngược lại, nếu cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mặt phẳng này có chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia hay không ? Định lí 3 sau đây trả lời câu hỏi đó.

Tính chất của hai mặt phẳng vuông góc

ĐỊNH LÍ 3

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng a nào nằm trong (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

Chứng minh (h.112)

Gọi c là giao tuyến của (P) và (Q), H là giao điểm của a và c. Trong mp(Q), kẻ đường thẳng b đi qua điểm H và vuông góc với c. Khi đó, góc giữa (P) và (Q) chính là góc giữa a và b. Vì $(P) \perp (Q)$ nên $a \perp b$. Như vậy, ta có đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng b, c cắt nhau cùng thuộc (Q), suy ra $a \perp (Q)$. □

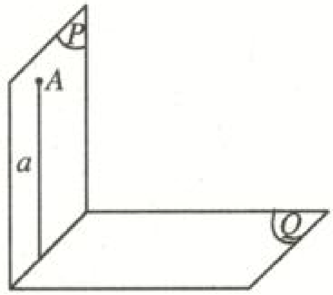
Từ định lí 2 và định lí 3, ta dễ dàng suy ra các hệ quả sau :

HỆ QUẢ 1 (h.113)

Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

Hệ quả 1 được viết gọn là :

$$\left.\begin{array}{l}(P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a\end{array}\right\} \Rightarrow a \subset (P).$$



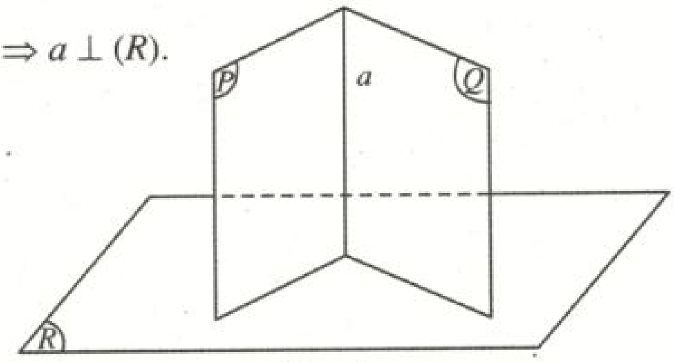
Hình 113

HỆ QUẢ 2 (h.114)

> *Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.*

Hệ quả 2 được viết gọn là :

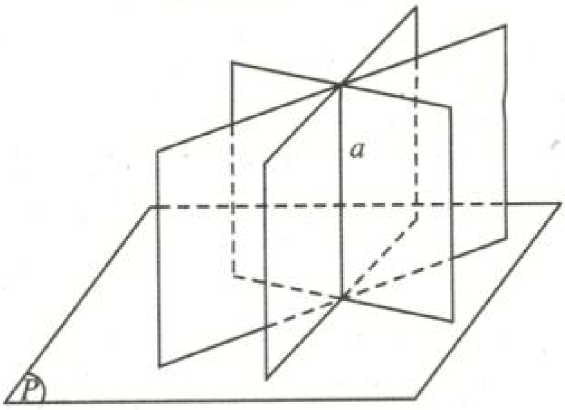
$$\left.\begin{array}{l}(P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R)\end{array}\right\} \Rightarrow a \perp (R).$$



Hình 114

Từ định lí 2, ta nhận thấy nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì qua a có vô số mặt phẳng vuông góc với (P) (h.115). Vậy khi a không vuông góc với (P) thì có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và vuông góc với (P) ?

Hệ quả sau sẽ trả lời câu hỏi đó.



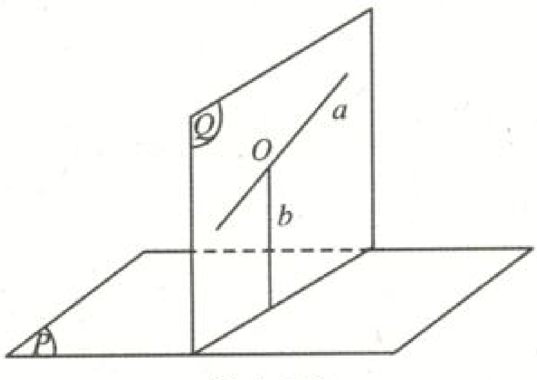
Hình 115

HỆ QUẢ 3

> *Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).*

2 (Để chứng minh hệ quả 3)

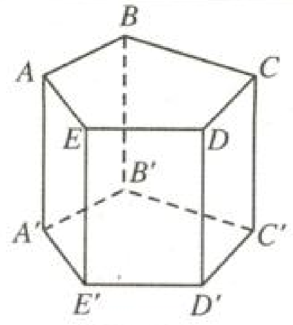
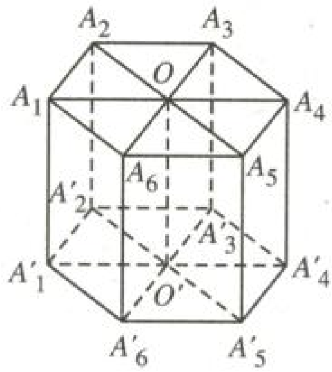
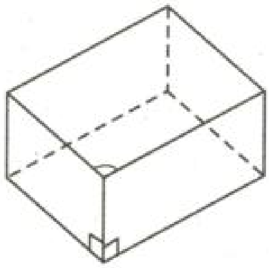
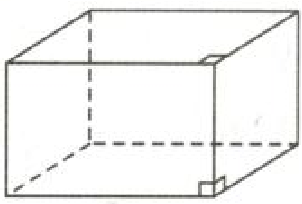
- Lấy điểm O thuộc a, dựng đường thẳng b đi qua điểm O và vuông góc với (P). Hãy chứng tỏ mp(a, b) chính là mp(Q) phải tìm (h.116).
- Sử dụng hệ quả 2 để chứng minh tính duy nhất của mặt phẳng (Q).

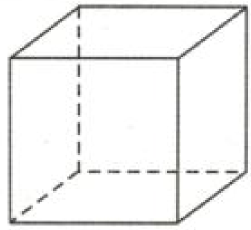


Hình 116

3. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương

Trong chương II, ta đã nêu định nghĩa hình lăng trụ. Ở phần này, ta sẽ xét một số hình lăng trụ đặc biệt.

ĐỊNH NGHĨA 3	HÌNH VẼ	?2
Hình lăng trụ đứng *Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy (h.117).*	 *Hình 117*	• *Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình gì ?* • *Các mặt bên của hình lăng trụ đứng có vuông góc với mặt đáy không ?*
Hình lăng trụ đều *Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều (h.118).*	 *Hình 118*	*Các mặt bên của hình lăng trụ đều có bằng nhau không ?*
Hình hộp đứng *Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành (h.119).*	 *Hình 119*	*Hình hộp đứng có bao nhiêu mặt là hình chữ nhật ?*
Hình hộp chữ nhật *Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (h.120)*	 *Hình 120*	*Sáu mặt của hình hộp chữ nhật có phải là những hình chữ nhật không ? Ngược lại, một hình hộp mà sáu mặt của nó là hình chữ nhật có phải là hình hộp chữ nhật không ?*

ĐỊNH NGHĨA 3	HÌNH VẼ	?2
Hình lập phương *Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau (h.121).*	 *Hình 121*	*Hình hộp chữ nhật mà diện tích các mặt đều bằng nhau có phải là hình lập phương hay không ?*

Bài toán

Tính độ dài đường chéo của hình hộp chữ nhật khi biết độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là a, b, c (a, b, c gọi là ba kích thước của hình hộp chữ nhật).

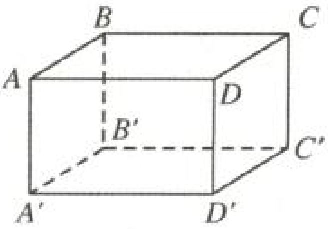
Giải (h.122)

Từ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AA'} = 0$

ta có $\overrightarrow{AC'}^2 = a^2 + b^2 + c^2$

hay $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Hình 122

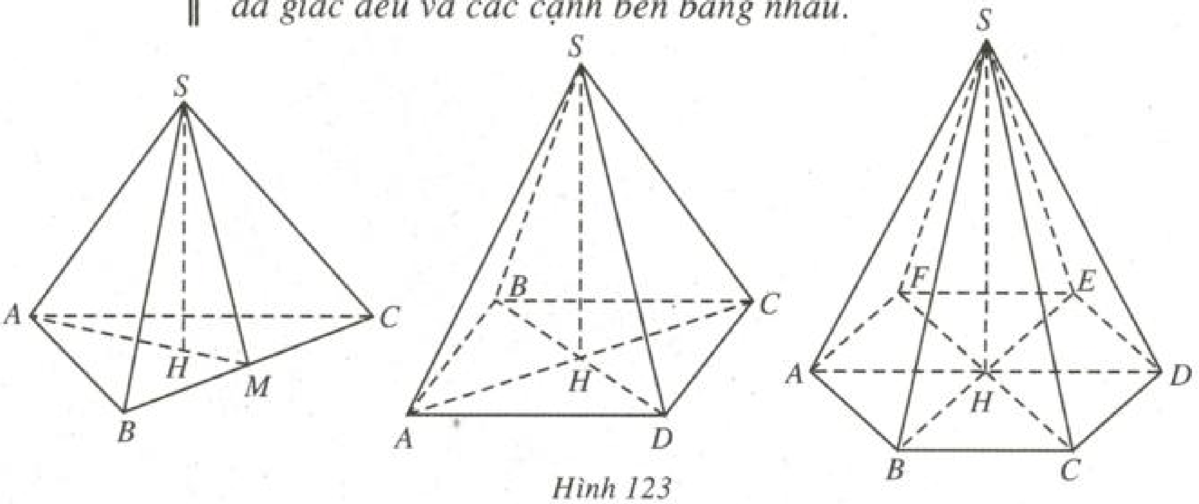
Tương tự các đường chéo còn lại cũng bằng $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. □

?3 *Độ dài đường chéo của hình lập phương cạnh a bằng bao nhiêu ?*

4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

ĐỊNH NGHĨA 4

*Một hình chóp được gọi là **hình chóp đều** nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.*



Hình 123

Ta biết rằng đối với một hình chóp bất kì, đường thẳng vuông góc với mặt đáy kẻ từ đỉnh gọi là ***đường cao*** của hình chóp.

?4 *Các kết quả sau đây về hình chóp đều có đúng không ? Vì sao ?*

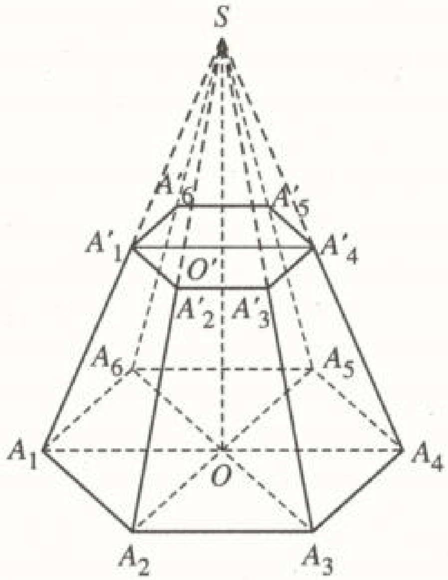
- *Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và đường cao của hình chóp đi qua tâm của đáy (tâm của đa giác đều chính là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp đa giác đó).*
- *Một hình chóp là hình chóp đều khi và chỉ khi đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.*

ĐỊNH NGHĨA 5

> *Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là* ***hình chóp cụt đều****.*

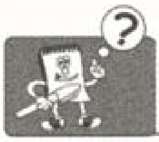
Đoạn nối tâm của hai đáy được gọi là ***đường cao*** của hình chóp cụt đều.

?5 *Tại sao trong hình chóp cụt đều, các mặt bên là những hình thang cân bằng nhau ?*



Hình 124

Em có biết



KIM TỰ THÁP AI CẬP

Nhiều Kim tự tháp (từ Hán - Việt nghĩa là cái tháp hình chữ kim 金, tức là hình chóp) đã được xây dựng ở Ai Cập bắt đầu khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Các tháp đó là những ngôi mộ của vua, hoàng hậu, ...

Kim tự tháp Kê-ốp (Chéops) (ở hình trên) là tháp lớn nhất. Nó được coi là một trong bảy kì quan của thế giới. Đó là một hình chóp tứ giác đều, đáy là một hình vuông có cạnh dài khoảng 230m, ngày xưa có chiều cao khoảng 147m, ngày nay chỉ còn cao 138m do bị xói mòn ở đỉnh. Trong hơn 4000 năm, đó là kiến trúc cao nhất thế giới. Mãi đến thời Trung cổ mới có một số nhà thờ cao hơn. Tháp nặng khoảng 6 triệu tấn và được tạo thành bởi hơn 2 300 000 tảng đá.

Ở bên trong kim tự tháp Kê-ốp có "buồng của vua" dạng hình hộp chữ nhật, dài 20 "cánh tay", rộng 10 "cánh tay", cao 11,18 "cánh tay" ("cánh tay" là đơn vị độ dài thời cổ, xấp xỉ 52,5cm). Số đo khá lẻ 11,18 này đã hấp dẫn các nhà khảo cứu : phải chăng có thể giải thích điều này khi tính độ dài đường chéo hình hộp và độ dài đường chéo mặt bên của hình hộp đó ?

Câu hỏi và bài tập

21. Các mệnh đề sau đúng hay sai ?

a) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau ;

b) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì vuông góc với nhau ;

c) Qua một đường thẳng cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;

d) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau cho trước ;

e) Các mặt phẳng cùng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước thì luôn đi qua một đường thẳng cố định ;

f) Hình lăng trụ có hai mặt bên là hình chữ nhật là hình lăng trụ đứng ;

g) Hình chóp có đáy là đa giác đều và ba cạnh bên bằng nhau là hình chóp đều.

22. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Nếu

$$AC' = BD' = B'D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

thì hình hộp đó có phải là hình hộp chữ nhật không ? Vì sao ?

23. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a.

a) Chứng minh rằng AC' vuông góc với hai mặt phẳng $(A'BD)$ và $(B'CD')$.

b) Cắt hình lập phương bởi mặt phẳng trung trực của AC'. Chứng minh thiết diện tạo thành là một lục giác đều. Tính diện tích thiết diện đó.

24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = x$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SDC) tạo với nhau góc 60°.

25. Cho hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) có giao tuyến Δ. Lấy A, B cùng thuộc Δ và lấy $C \in (P)$, $D \in (Q)$ sao cho $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ và $AB = AC = BD$. Xác định thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm A và vuông góc với CD. Tính diện tích thiết diện khi $AC = AB = BD = a$.

26. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp gì nếu thoả mãn một trong các điều kiện sau ?

a) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối bằng nhau ;

b) Tứ diện $AB'CD'$ có các cạnh đối vuông góc ;

c) Tứ diện $AB'CD'$ là tứ diện đều.

27. Cho hai tam giác ACD, BCD nằm trên hai mặt phẳng vuông góc với nhau và $AC = AD = BC = BD = a$, $CD = 2x$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính AB, IJ theo a và x.

b) Với giá trị nào của x thì hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) vuông góc ?

28. Cho tam giác ABC và mặt phẳng (P). Biết góc giữa mp(P) và mp(ABC) là φ $(\varphi \neq 90^{\circ})$; hình chiếu của tam giác ABC trên mp(P) là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng

$$S_{A'B'C'} = S_{ABC} \,.\, \cos\varphi.$$

Hướng dẫn. Xét hai trường hợp :

a) Tam giác ABC có một cạnh song song hoặc nằm trong mp(P) ;

b) Tam giác ABC không có cạnh nào song song hay nằm trong mp(P).