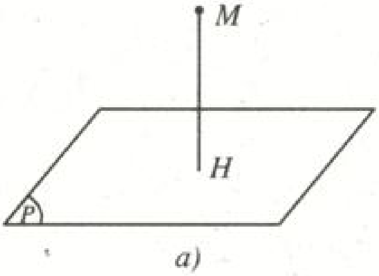
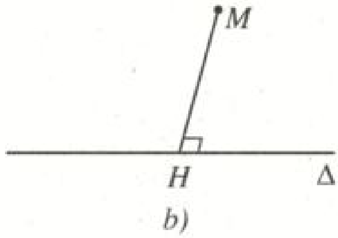
§5 KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, đến một đường thẳng

Để đi đến khái niệm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng hoặc một đường thẳng, ta xét hình chiếu vuông góc của điểm đó trên mặt phẳng hoặc đường thẳng. Trên hình 125a), ta có H là hình chiếu của M trên mp(P) và trên hình 125b), ta có H là hình chiếu của M trên đường thẳng Δ.





Hình 125

Ta có định nghĩa sau :

ĐỊNH NGHĨA 1

> ***Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng*** *(P) (hoặc* ***đến đường thẳng*** *Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P) (hoặc trên đường thẳng Δ).*

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) được kí hiệu là $d(M\ ;\ (P))$.

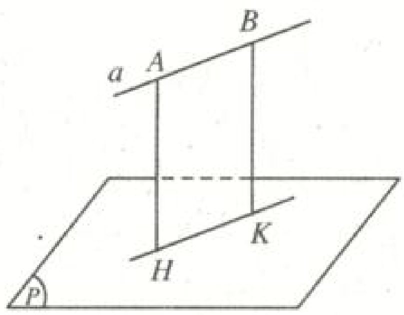
Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được kí hiệu là $d(M\ ;\ \Delta)$.

?1 *Trong các khoảng cách từ M đến một điểm bất kì thuộc mặt phẳng (P), khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

?2 *Cũng câu hỏi như trên nếu thay mặt phẳng (P) bởi đường thẳng Δ.*

2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Với hai điểm A, B bất kì trên a, hiển nhiên ta có $d(A\ ;\ (P)) = d(B\ ;\ (P))$ (h.126). Như vậy, $d(A\ ;\ (P))$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A khi A thay đổi trên a. Từ đó ta có định nghĩa



Hình 126

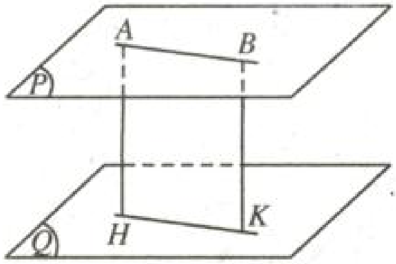
ĐỊNH NGHĨA 2

> ***Khoảng cách giữa đường thẳng*** *a* ***và mặt phẳng*** *(P)* ***song song*** *với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).*

Kí hiệu khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nó là $d(a ; (P))$.

$\boxed{?3}$ *Khi đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), trong các khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến một điểm bất kì của (P), khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

Cho hai mặt phẳng song song (P) và (Q). Khi ấy, dễ thấy $d(A ; (Q)) = d(B ; (Q))$ với A, B là hai điểm bất kì thuộc (P), tức là $d(A ; (Q))$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm A khi A thay đổi trên (P) (h.127).



Hình 127

Từ đó ta có định nghĩa

ĐỊNH NGHĨA 3

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song *là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*

Kí hiệu khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) là $d((P) ; (Q))$ thì $d((P) ; (Q)) = d(A ; (Q)) = d(C ; (P))$, trong đó A là một điểm nào đó thuộc (P) và C là một điểm nào đó thuộc (Q).

$\boxed{?4}$ *Trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt thuộc hai mặt phẳng song song, khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

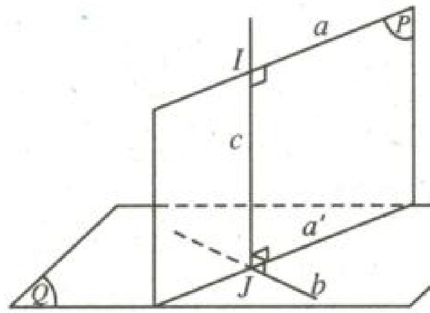
Bài toán

Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tìm đường thẳng c cắt cả a và b đồng thời vuông góc với cả a và b.

Giải

Do a và b chéo nhau nên có duy nhất mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng b và song song với đường thẳng a.

Mặt phẳng (P) đi qua a và vuông góc với (Q) cắt đường thẳng b tại điểm J. Gọi c là đường thẳng đi qua J và vuông góc với (Q) thì c nằm trong mp(P), do đó c cắt a tại điểm I. Khi ấy c là đường thẳng phải tìm (h.128). □



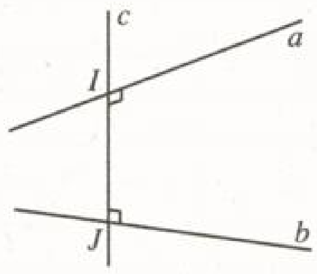
Hình 128

Chứng minh tính duy nhất của đường thẳng c trong bài toán trên.

Thuật ngữ

Đường thẳng c nói trên gọi là ***đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau*** a và b.

Nếu đường vuông góc chung cắt hai đường thẳng chéo nhau tại I và J thì đoạn thẳng IJ gọi là ***đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng*** đó (h.129).



Hình 129

ĐỊNH NGHĨA 4

> ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** *là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.*

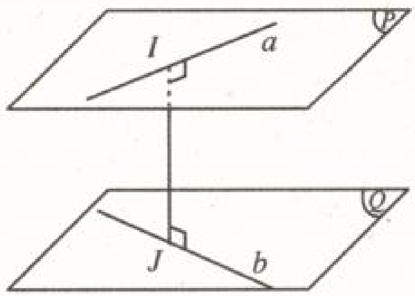
Kí hiệu khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b là $d\,(a\,;\,b)$

?5 *Trong các khoảng cách giữa hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng chéo nhau, khoảng cách nào là nhỏ nhất ?*

Nếu gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt đi qua hai đường thẳng a và b thì rõ ràng (h.130) :

$$IJ = d(a\,;\,b) = d(a\,;\,(Q)) = d(b\,;\,(P))$$
$$= d((P)\,;\,(Q)).$$

Vậy ta có :



Hình 130

Nhận xét

1) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.

2) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

4. Một số ví dụ

Ví dụ 1

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

c) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'C)$ và $(A'C'D)$ trong trường hợp $a = b = c$.

Giải (h.131)

a) Kẻ BH vuông góc với AC, do

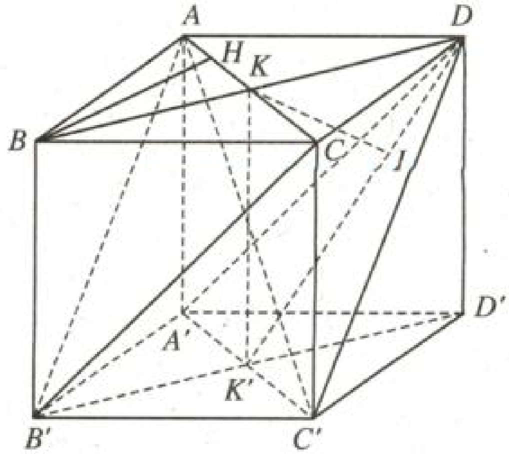
$$BH \perp AA'$$

nên $$BH \perp (ACC'A').$$

Vậy $d(B\,;\,(ACC'A')) = BH$. Ta có

$$BH\,.\,AC = BA\,.\,BC.$$

hay $$BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Hình 131

b) BB' và AC' chéo nhau mà $BB' \,//\, (ACC'A')$ nên

$$d(BB'\,;\,AC') = d(BB'\,;\,(ACC'A')) = d(B\,;\,(ACC'A')) = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

c) Dễ thấy mp($AB'C$) và mp($A'C'D$) song song với nhau. Do $a = b = c$ nên $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương. Khi đó, gọi K và K' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$ thì mp($KK'D'D$) là mặt phẳng trung trực của $A'C'$. Từ đó suy ra mp($KK'D'D$) vuông góc với mp($DA'C'$). Kẻ KI vuông góc với giao tuyến DK' của hai mặt phẳng đó thì $KI \perp$ mp($A'C'D$). Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng ($AB'C$) và ($A'C'D$) bằng KI.

Ta có tam giác $KK'D$ vuông tại K nên

$$\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{DK^2} + \frac{1}{KK'^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2},$$

tức là $$KI = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Chú ý rằng BD' vuông góc với hai mặt phẳng (ACB'), ($DA'C'$) và đi qua tâm G, G' của hai tam giác đều $AB'C$, $DA'C'$. Từ đó suy ra khoảng cách cần tìm cũng bằng GG' và bằng $\frac{1}{3}BD'$. □

Ví dụ 2

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

a) SB và AD ; *b) BD và SC.*

Giải (h.132)

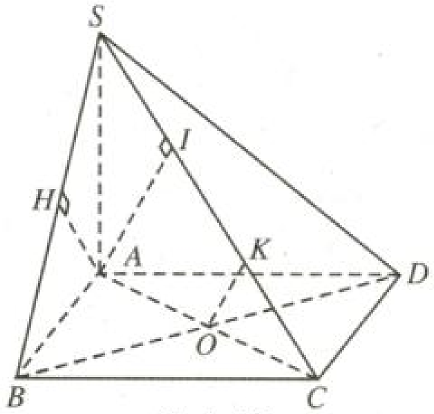
a) Ta có $AD \perp (SBA)$, kẻ AH vuông góc với SB thì AH là đường vuông góc chung của SB và AD. Vậy

$$d(AD\ ;\ SB) = AH.$$

Vì AH là đường cao của tam giác vuông cân SAB nên

$$AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Từ đó $\quad d(AD\ ;\ SB) = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$



Hình 132

b) Ta có BD vuông góc với mp(SAC) tại tâm O của hình vuông $ABCD$. Trong mp(SAC), kẻ OK vuông góc với SC thì OK là đường vuông góc chung của BD và SC. Dễ thấy $d(BD\ ;\ SC) = OK = \dfrac{1}{2}AI$ (AI là đường cao của tam giác vuông SAC). Ta có

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2}$$

nên $AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, từ đó $d(BD\ ;\ SC) = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}.$ □

Câu hỏi và bài tập

29. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = BC = AD = BD = a$, $AB = c$, $CD = c'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

30. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30°. Hình chiếu H của điểm A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và $B'C'$ vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

31. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

32. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AC' = 2a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD').

b) Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC' và CD'. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

33. Cho hình hộp thoi $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.

34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng đáy $(ABCD)$.

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD ; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K, hãy tính khoảng cách đó theo a.

35. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $AC = BD$, $AD = BC$ thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường thẳng nối trung điểm của AB và CD. Điều ngược lại có đúng không ?