

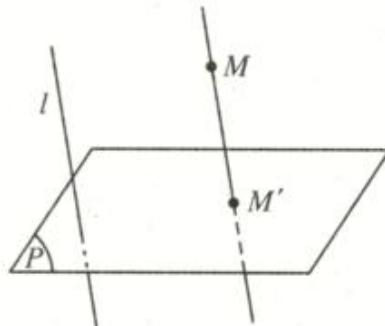
§5

PHÉP CHIẾU SONG SONG

1. Định nghĩa phép chiếu song song

Trong không gian cho mặt phẳng (P) và đường thẳng l cắt $mp(P)$.

Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng đi qua M và song song hoặc trùng với l . Đường thẳng này cắt $mp(P)$ tại một điểm M' nào đó (h.73).



Hình 73

Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mặt phẳng (P) như trên gọi là **phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l** .

Mặt phẳng (P) gọi là **mặt phẳng chiếu**, đường thẳng l gọi là **phương chiếu**; điểm M' gọi là **hình chiếu song song** (hoặc **ảnh**) **của điểm M** qua phép chiếu song song nói trên.

Cho hình \mathcal{H} . Tập hợp \mathcal{H}' gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc \mathcal{H} gọi là **hình chiếu song song** (hoặc **ảnh**) **của hình \mathcal{H}** qua phép chiếu nói trên.

Bóng trên mặt đất phẳng của một vật chính là hình chiếu song song của vật ấy trên mặt đất (các tia sáng mặt trời được coi như song song với nhau).

- [?1] Nếu điểm M thuộc mặt phẳng chiếu (P) thì hình chiếu song song của nó là điểm nào?
- [?2] Cho đường thẳng a song song với phương chiếu l . Hình chiếu song song của a (hoặc một phần của nó) là hình nào?

2. Tính chất

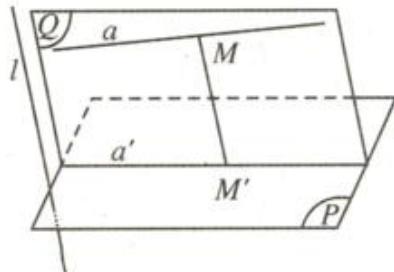
Trong các tính chất dưới đây của phép chiếu song song theo phương l , ta chỉ xét hình chiếu song song của **các đoạn thẳng hoặc đường thẳng không song song và không trùng với l** .

Tính chất 1

Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng.

Chứng minh (h.74)

Xét phép chiếu song song lên mp(P) theo phương l . Giả sử a là một đường thẳng không song song và không trùng với l . Gọi M là một điểm bất kì của a và M' là hình chiếu của nó. Vì MM' song song (hoặc trùng) với l nên M' nằm trên mp(Q) đi qua a và song song với l (hoặc chứa l). Mặt khác, M' nằm trên mp(P). Vậy M' nằm trên giao tuyến a' của hai mặt phẳng (P) và (Q).



Hình 74

Ngược lại, dễ thấy mỗi điểm M' nằm trên a' là hình chiếu của một điểm M nằm trên a . Vậy hình chiếu của a chính là đường thẳng a' . \square

- [?3]** Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng chiếu (P) thì hình chiếu song song của a là hình nào?
- [?4]** Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu song song của a có đi qua điểm A hay không?

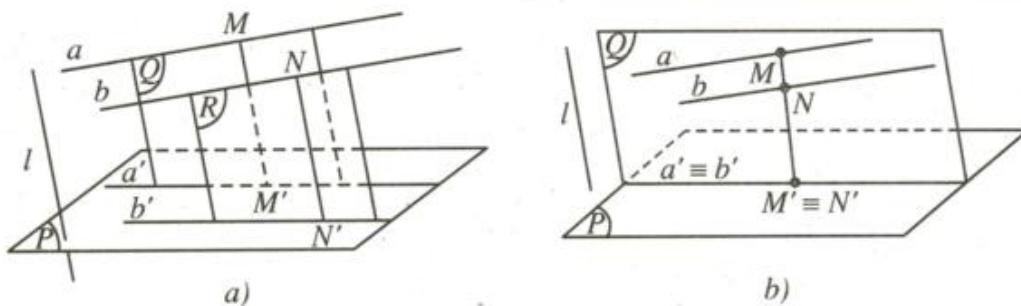
HỆ QUẢ

Hình chiếu song song của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng, của một tia là một tia.

Từ việc chứng minh tính chất 1, ta thấy hình chiếu song song của đường thẳng a là giao tuyến của mặt phẳng chiếu (P) và mp(Q), trong đó (Q) là mặt phẳng đi qua a và song song với l hoặc chứa l . Do đó ta có

Tính chất 2 (h.75)

Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.



Hình 75

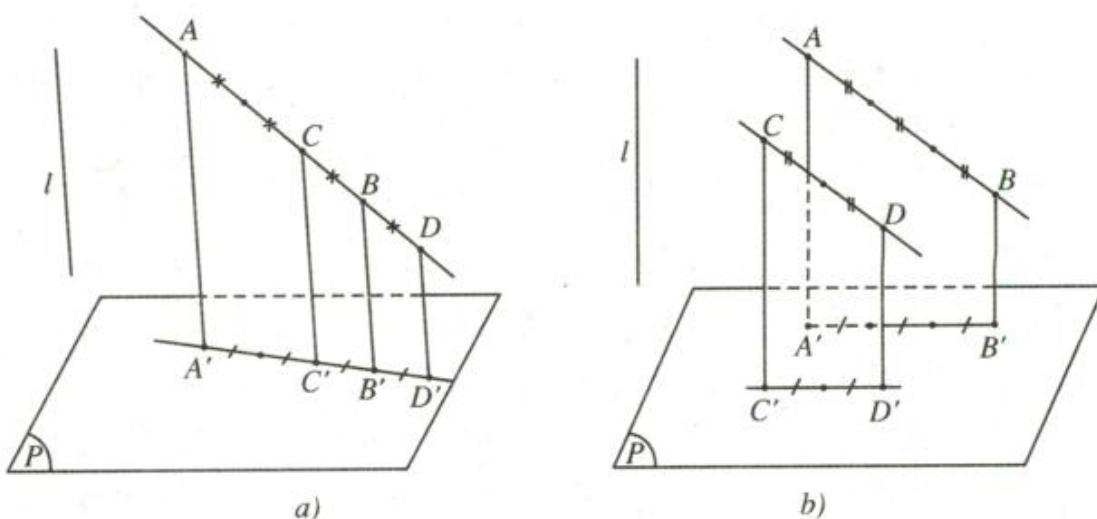
Tính chất 3

Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

Tính chất 3 có nghĩa là : Nếu AB và CD là hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) có hình chiếu song song trên $mp(P)$ là $A'B'$ và $C'D'$ thì

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}.$$

Hình 76 minh họa tính chất đó.



Hình 76

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Ở §1 của chương này, ta đã nêu ra một số quy tắc để vẽ hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng. Các quy tắc ấy dựa trên định nghĩa sau đây

ĐỊNH NGHĨA

Hình biểu diễn của một hình \mathcal{H} trong không gian là hình chiếu song song của hình \mathcal{H} trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Như vậy, muốn vẽ đúng hình biểu diễn, ta phải áp dụng các tính chất nói trên của phép chiếu song song. Do đó, ngoài những quy tắc đã học

trước đây (được suy từ các tính chất 1 và 2), ta cần lưu ý thêm quy tắc sau (suy từ tính chất 3) :

Nếu trên hình \mathcal{H} có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng chẳng những được biểu diễn bởi hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau), mà tỉ số của hai đoạn thẳng này còn phải bằng tỉ số của hai đoạn thẳng tương ứng trên hình \mathcal{H} .

[?5] Hình biểu diễn của hình bình hành là hình gì ?



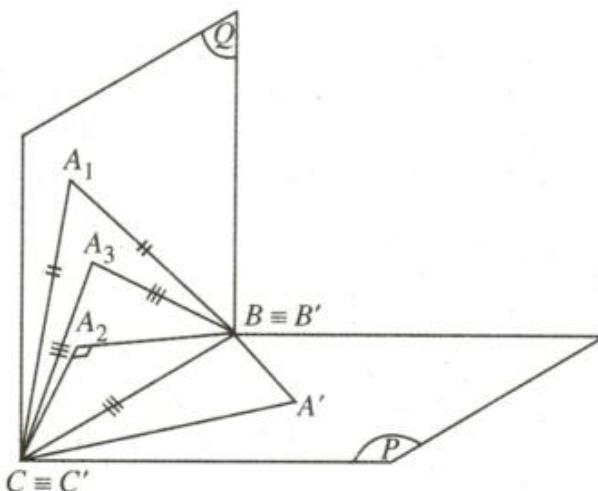
CHÚ Ý

Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình \mathcal{H} có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình \mathcal{H} không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

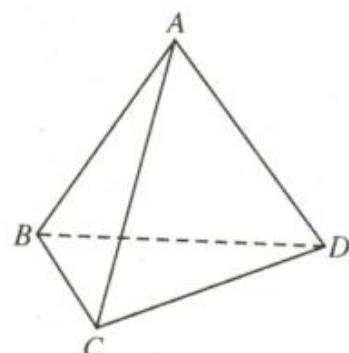
[?6] Hình biểu diễn của hình thang là hình gì ?

[?7] Hình biểu diễn của hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông là hình gì ?

[?8] Có phải một tam giác bất kì đều có thể xem là hình biểu diễn của tam giác cân, tam giác vuông, tam giác đều hay không ? (h.77).



Hình 77



Hình 78

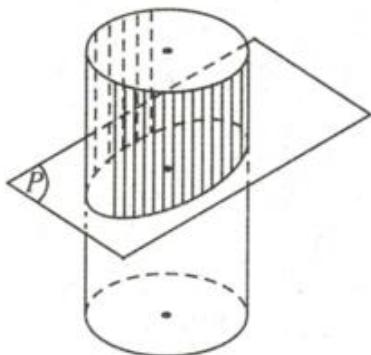
[?9] Hình biểu diễn của một tứ diện đều có thể vẽ như hình 78 hay không ?

Hình biểu diễn của một đường tròn

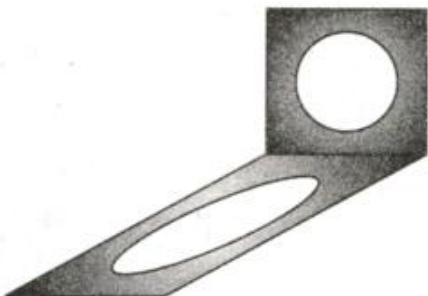
Người ta chứng minh được rằng :

Hình chiếu song song của một đường tròn là một đường elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

Vì vậy, ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn (h.79, h.80).



Hình 79



Hình 80



1

Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hãy dựng hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều đó.



2

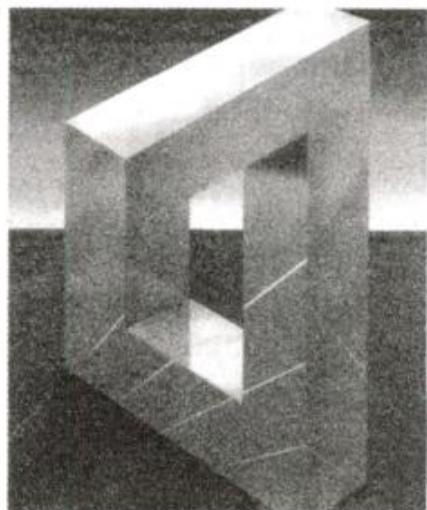
Cho một đường elip là hình biểu diễn của một đường tròn. Hãy vẽ hình biểu diễn của mỗi hình sau đây :

- Một dây cung và đường kính vuông góc với dây cung đó của đường tròn.
- Hai đường kính vuông góc của đường tròn.
- Một tam giác đều nội tiếp đường tròn.

Vui một chút !

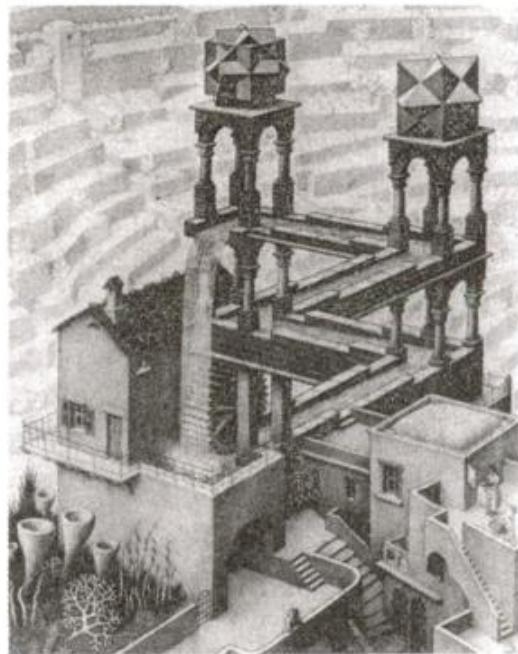


- Hình sau có phải là hình biểu diễn của một hình không gian hay không ?



Tranh của Et-se (M.C. Escher) ▶

- "Chuyển động vĩnh cửu ?" : Liệu nước có chảy mãi như thế không ?



Tranh của Ét-se (M.C. Escher)

Câu hỏi và bài tập

40. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
 - a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau ;
 - b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì cắt nhau ;
 - c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau ;
 - d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể cắt nhau, trùng nhau, song song với nhau.
41. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
 - a) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau ;
 - b) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể cắt nhau ;
 - c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau ;
 - d) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu song song của nó ;
 - e) Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu song song của nó ;
 - f) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu song song của nó.
42. Tam giác ABC có hình chiếu song song là tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng trọng tâm tam giác ABC có hình chiếu song song là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.

43. Vẽ hình biểu diễn của một tứ diện và trọng tâm của nó.
44. Vẽ hình biểu diễn của một tam giác vuông nội tiếp trong một đường tròn.
45. Vẽ hình biểu diễn của một hình vuông nội tiếp trong một đường tròn.
46. Vẽ hình biểu diễn của một lục giác đều.
47. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm điểm I trên đường chéo B_1D và điểm J trên đường chéo AC sao cho $IJ \parallel BC_1$. Tính tỉ số $\frac{ID}{IB_1}$.