

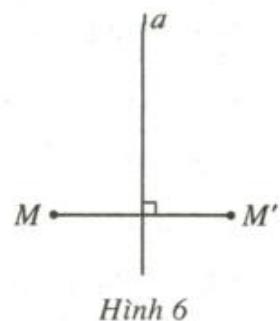
§3

PHÉP ĐỐI XỨNG TRỰC

1. Định nghĩa phép đối xứng trực

Ta nhắc lại : Điểm M' gọi là đối xứng với điểm M qua đường thẳng a nếu a là đường trung trực của đoạn thẳng MM' (h.6). Nếu M nằm trên a thì ta xem M đối xứng với chính nó qua a .

Phép đối xứng qua đường thẳng a được định nghĩa như sau



Hình 6

ĐỊNH NGHĨA 1

|| *Phép đối xứng qua đường thẳng a là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua a .*

Kí hiệu và thuật ngữ

Phép đối xứng qua đường thẳng a thường được kí hiệu là D_a . Phép đối xứng qua đường thẳng còn gọi đơn giản là **phép đối xứng trực**.

Đường thẳng a gọi là **trục của phép đối xứng**, hay đơn giản là **trục đối xứng**.

[?1] Qua phép đối xứng trực D_a , những điểm nào biến thành chính nó ?

[?2] Nếu phép đối xứng trực D_a biến điểm M thành điểm M' thì nó biến điểm M' thành điểm nào ? Nếu nó biến hình \mathcal{H} thành hình \mathcal{H}' thì nó biến hình \mathcal{H}' thành hình nào ?

2. Định lí

Phép đối xứng trực là một phép dời hình.



1 (Để chứng minh định lí)

Giả sử D_a là phép đối xứng qua đường thẳng a . Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy mà Ox là đường thẳng a (h.7).

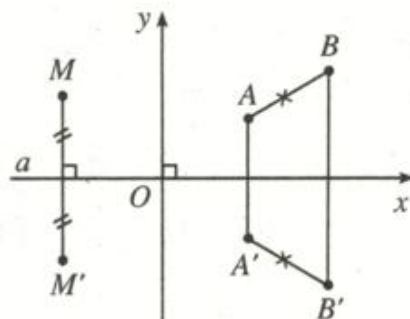
Lấy hai điểm tùy ý $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$, hãy viết toạ độ của $A' = D_a(A)$ và $B' = D_a(B)$ rồi dùng công thức tính khoảng cách để chứng minh $A'B' = AB$.



CHÚ Ý

Qua hoạt động trên, ta thấy nếu phép đối xứng qua trục Ox biến điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x'; y')$ thì

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



Hình 7

Công thức trên gọi là *biểu thức toạ độ của phép đối xứng qua trục Ox*.

[?3] Phép đối xứng qua trục Oy có biểu thức toạ độ như thế nào ?

3. Trục đối xứng của một hình

Chúng ta hãy quan sát bốn hình sau đây (mỗi chữ cái là một hình) :

A D P Q

Người ta nói hình thứ nhất và hình thứ hai có tính "cân xứng" vì với mỗi hình, có thể tìm thấy một đường thẳng sao cho phép đối xứng qua đường thẳng đó biến hình ấy thành chính nó. Các đường thẳng đó gọi là trục đối xứng của mỗi hình. Hai hình còn lại không "cân xứng" vì chúng không có những đường thẳng như vậy.

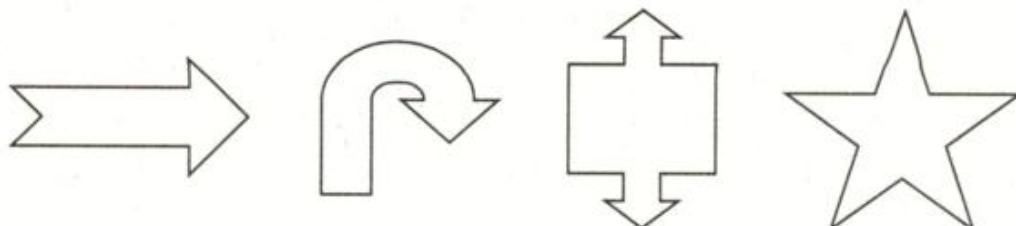
ĐỊNH NGHĨA 2

|| *Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình \mathcal{H} nếu phép đối xứng trục D_d biến \mathcal{H} thành chính nó, tức là $D_d(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.*

Một hình có thể không có trục đối xứng, cũng có thể có một hay nhiều trục đối xứng.

[?4] Trong các hình sau đây, hình nào có trục đối xứng và có mẩy trục ? (Mỗi chữ cái là một hình)

A B C D Đ E G H I K L
M N O P Q R S T U V X Y Z



Hãy làm thử !

Các em hãy nhổ một giọt mực lên một tờ giấy trắng, rồi gấp tờ giấy theo một đường thẳng đi qua giọt mực đó. Áp hai phần của tờ giấy sát vào nhau rồi mở ra. Các em sẽ được những hình có trục đối xứng khá kì thú !

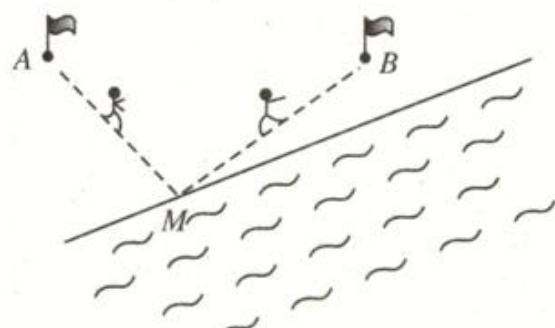
Dưới đây giới thiệu với các em một số hình như vậy.



4. Áp dụng

Người ta tổ chức một cuộc chạy thi trên bãi biển với điều kiện sau : Các vận động viên xuất phát từ địa điểm A và đích là địa điểm B, nhưng trước khi đến B phải nhúng mình vào nước biển (ta giả sử rằng mép nước biển là một đường thẳng) (h.8).

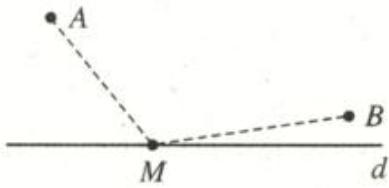
Để chiến thắng trong cuộc chạy đua này, ngoài tốc độ chạy, còn có một yếu tố quan trọng là vận động viên phải xác định vị trí M ở mép nước mà mình phải chạy từ A tới để nhúng mình vào nước biển, rồi từ đó chạy đến B sao cho quãng đường phải chạy là ngắn nhất.



Hình 8

Như vậy, bài toán có thể phát biểu dưới dạng toán học thuần tuý sau đây

Cho hai điểm A và B nằm về một phía của đường thẳng d (h.9). Hãy xác định điểm M trên d sao cho $AM + MB$ bé nhất.



Hình 9

- [?5] *Nếu hai điểm A và B nằm về hai phía của đường thẳng d thì lời giải bài toán trên rất đơn giản. Trong trường hợp đó, điểm M cần tìm là điểm nào?*

Bây giờ xét trường hợp A, B nằm về một phía của d. Hãy lấy điểm A' đối xứng với A qua d, và chú ý rằng: $AM + MB = A'M + MB$.



2

Với gợi ý trên đây, hãy nêu lời giải của bài toán.

Câu hỏi và bài tập

7. Qua phép đối xứng trục D_a (a là trục đối xứng), đường thẳng d biến thành đường thẳng d' . Hãy trả lời các câu hỏi sau:
 - a) Khi nào thì d song song với d' ?
 - b) Khi nào thì d trùng với d' ?
 - c) Khi nào thì d cắt d' ? Giao điểm của d và d' có tính chất gì?
 - d) Khi nào d vuông góc với d' ?
8. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho các đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình:

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 4x + 5y + 1 = 0 ;$$

$$(C_2) : x^2 + y^2 + 10y - 5 = 0.$$

Viết phương trình ảnh của mỗi đường tròn trên qua phép đối xứng có trục Oy .

9. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Hãy xác định điểm B trên Ox và điểm C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.
10. Cho hai điểm B, C cố định nằm trên đường tròn $(O; R)$ và điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng trục để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn. Khi BC không phải là đường kính, gọi H' là giao điểm của đường thẳng AH với đường tròn $(O; R)$. Chứng minh rằng H đối xứng với H' qua đường thẳng BC .

- 11.** a) Chỉ ra trực đối xứng (nếu có) của mỗi hình sau đây (mỗi hình là một từ bao gồm một số chữ cái) :

**MÂM, HOC, NHANH, HE, SHE, COACH, IS, IT,
SOS, CHEO**

- b) Chứng minh rằng đồ thị của hàm số chẵn luôn có trực đối xứng.