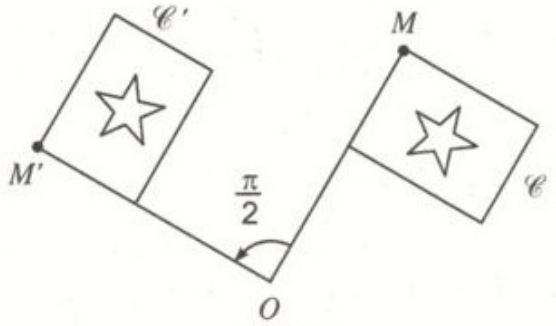
§4 PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa phép quay

Trong mặt phẳng cho một điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM = OM' và (OM, OM') = φ được gọi là ***phép quay tâm O góc quay φ.***

Phép quay thường được kí hiệu là Q, và nếu muốn chỉ rõ tâm quay O và góc quay φ thì ta kí hiệu phép quay đó là $Q_{(O,\ \varphi)}$.



Hình 10

Hình 10 cho ta thấy phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$ biến điểm M thành điểm M', biến lá cờ $\mathscr{C}$ thành lá cờ $\mathscr{C}'$.

?1 *Phép đồng nhất có phải là phép quay hay không ?*

2. Định lí

Phép quay là một phép dời hình.

Chứng minh

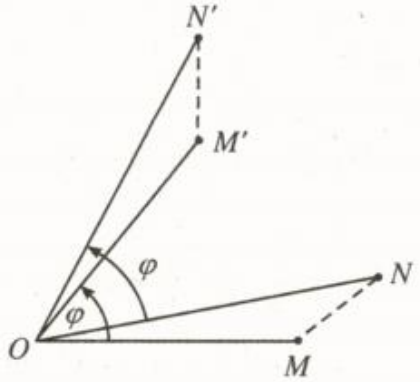
Giả sử phép quay $Q_{(O,\ \varphi)}$ biến điểm M thành M' và biến điểm N thành N', trong đó O, M, N không thẳng hàng (h.11). Theo định nghĩa của phép quay, ta có

$$OM = OM',$$
$$ON = ON'$$

và $(OM, OM') = (ON, ON') = \varphi$.

Theo hệ thức Sa-lơ về góc lượng giác, ta có

$$\begin{aligned}(OM, ON) &= (OM, OM') + (OM', ON)\\ &= (ON, ON') + (OM', ON)\\ &= (OM', ON').\end{aligned}$$



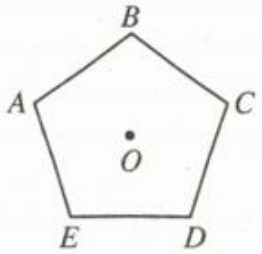
Hình 11

Suy ra $\widehat{MON} = \widehat{M'ON'}$. Như vậy hai tam giác MON và $M'ON'$ bằng nhau, do đó $M'N' = MN$.

Trường hợp O, M, N thẳng hàng, ta thấy ngay $M'N' = MN$. □

1

Cho hình ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O (h.12). Hãy chỉ ra một số phép quay biến ngũ giác đó thành chính nó.



Hình 12

3. Phép đối xứng tâm

Một trường hợp đặc biệt của phép quay là phép quay với góc quay π. Khi đó, nếu O là tâm quay thì mỗi điểm M được biến thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'. Bởi vậy, phép quay đó còn có tên gọi là phép đối xứng qua điểm O.

Phép đối xứng qua điểm O còn có thể được định nghĩa như sau :

> ***Phép đối xứng qua điểm*** *O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là*
>
> $$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}.$$

Kí hiệu và thuật ngữ

Phép đối xứng qua điểm O thường được kí hiệu là $Đ_O$. Phép đối xứng qua một điểm còn gọi đơn giản là ***phép đối xứng tâm***.

Điểm O gọi là ***tâm của phép đối xứng***, hay đơn giản là ***tâm đối xứng***.

Biểu thức toạ độ

Trong hệ toạ độ Oxy cho điểm $I(a\ ;\ b)$. Nếu phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm $M(x\ ;\ y)$ thành điểm $M'(x'\ ;\ y')$ thì

$$\boxed{\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y. \end{cases}}$$

Công thức trên gọi là *biểu thức toạ độ của phép đối xứng tâm $Đ_I$*.

2
Hãy giải thích tại sao có công thức trên.

Tâm đối xứng của một hình

Chúng ta hãy quan sát các hình biểu thị các chữ cái sau đây

Z S N

Tuy các hình đó không có trục đối xứng nhưng chúng cũng có tính "cân xứng" nào đó. Lí do là với mỗi hình, ta có thể tìm thấy một điểm O sao cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình đó thành chính nó.

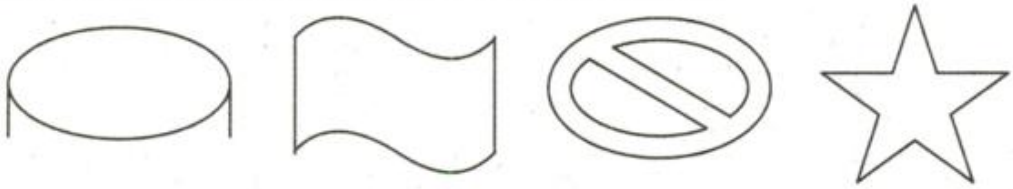
?2 *Điểm O như thế của mỗi hình trên đây là điểm nào ?*

Các điểm O như vậy được gọi là tâm đối xứng của mỗi hình.

> *Điểm O gọi là **tâm đối xứng của một hình** $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_O(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.*

?3 *Trong bảng chữ cái in hoa, những chữ nào có tâm đối xứng ? Những chữ nào có tâm đối xứng nhưng không có trục đối xứng ?*

?4 *Trong các hình sau đây, hình nào có tâm đối xứng ?*

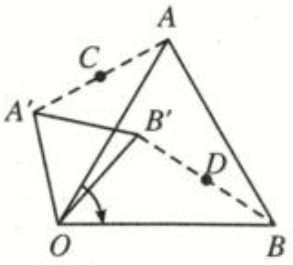


4. Ứng dụng của phép quay

Bài toán 1

Cho hai tam giác đều OAB và OA'B' như hình 13.

Gọi C và D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA' và BB'. Chứng minh rằng OCD là tam giác đều.



Hình 13

Giải

Xét phép quay Q tâm O với góc quay bằng một góc lượng giác (OA, OB). Rõ ràng Q biến A thành B và biến A' thành B', nên Q biến đoạn thẳng AA' thành đoạn thẳng BB'. Từ đó suy ra Q biến trung điểm C của AA' thành trung điểm D của BB'. Do đó $OC = OD$ và $\widehat{COD} = 60^o$. Vậy OCD là tam giác đều. □

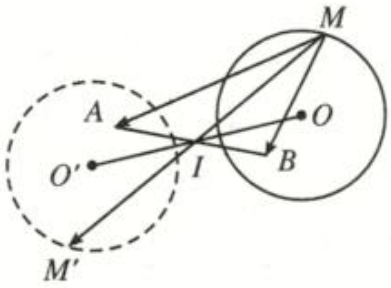
Bài toán 2

Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và hai điểm A, B cố định. Với mỗi điểm M, ta xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$. Tìm quỹ tích điểm M' khi điểm M chạy trên $(O\ ;\ R)$.

Giải (h.14)

Gọi I là trung điểm của AB thì I cố định và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Bởi vậy, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MI}$, tức là MM' nhận I làm trung điểm hay phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến điểm M thành M'. Vậy khi M chạy trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ thì quỹ tích M' là ảnh của đường tròn đó qua $Đ_I$. Nếu ta gọi O' là điểm đối xứng của O qua điểm I thì quỹ tích của M' là đường tròn $(O'\ ;\ R)$. □



Hình 14

Bài toán 3

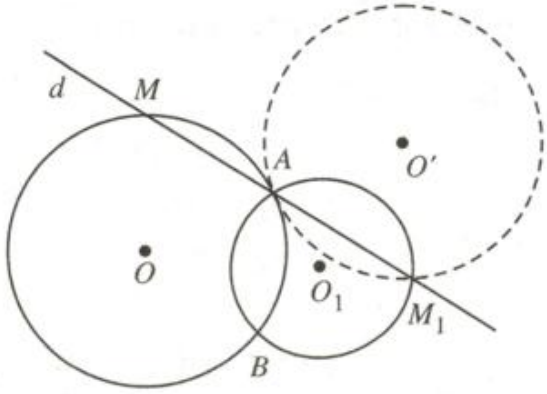
Cho hai đường tròn $(O\ ;\ R)$ và $(O_1\ ;\ R_1)$ cắt nhau tại hai điểm A, B. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A cắt $(O\ ;\ R)$ và $(O_1\ ;\ R_1)$ lần lượt tại M và M_1 sao cho A là trung điểm của MM_1.

Giải (h.15)

Giả sử ta đã dựng được đường thẳng d thoả mãn yêu cầu của bài toán. Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng qua A thì $Đ_A$ biến điểm M thành điểm M_1 và biến

đường tròn $(O\ ;\ R)$ thành đường tròn $(O'\ ;\ R)$. Vì M nằm trên $(O\ ;\ R)$ nên M_1 nằm trên $(O'\ ;\ R)$. Mặt khác M_1 lại nằm trên $(O_1\ ;\ R_1)$ nên M_1 là giao điểm khác A của hai đường tròn $(O'\ ;\ R)$ và $(O_1\ ;\ R_1)$.

Từ đó suy ra cách dựng :



Hình 15

• Dựng đường tròn $(O'\ ;\ R)$ đối xứng với $(O\ ;\ R)$ qua điểm A (O' là điểm đối xứng của O qua A).

• Lấy giao điểm M_1 của hai đường tròn $(O_1\ ;\ R_1)$ và $(O'\ ;\ R)$, M_1 khác A.

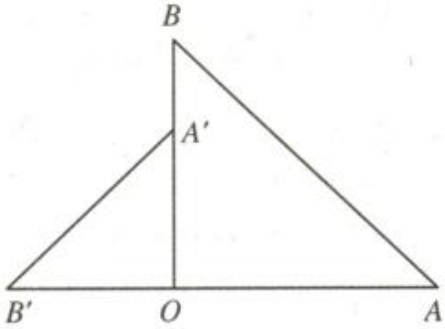
• Đường thẳng d là đường thẳng đi qua A và M_1.

?5 *Vì sao d thoả mãn điều kiện của bài toán ?*

Câu hỏi và bài tập

12. Cho phép quay Q tâm O với góc quay φ và cho đường thẳng d. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của d qua phép quay Q.

13. Cho hai tam giác vuông cân OAB và $OA'B'$ có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng $A'B$ (h.16). Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.



Hình 16

14. Giả sử phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến đường thẳng d thành đường thẳng d'. Chứng minh

a) Nếu d không đi qua tâm đối xứng O thì d' song song với d, O cách đều d và d' ;

b) Hai đường thẳng d và d' trùng nhau khi và chỉ khi d đi qua O.

15. Cho phép đối xứng tâm $Đ_O$ và đường thẳng d không đi qua O. Hãy nêu cách dựng ảnh d' của đường thẳng d qua $Đ_O$. Tìm cách dựng d' mà chỉ sử dụng compa một lần và thước thẳng ba lần.

16. Chỉ ra các tâm đối xứng của các hình sau đây :

a) Hình gồm hai đường thẳng cắt nhau ;

b) Hình gồm hai đường thẳng song song ;

c) Hình gồm hai đường tròn bằng nhau ;

d) Đường elip ;

e) Đường hypebol.

17. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ và một điểm A thay đổi trên đường tròn đó. Hãy dùng phép đối xứng tâm để chứng minh rằng trực tâm H của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Hướng dẫn. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy vẽ đường kính AM của đường tròn rồi chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng HM.

18. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$, đường thẳng Δ và điểm I. Tìm điểm A trên $(O\ ;\ R)$ và điểm B trên Δ sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

19. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và điểm $I(x_0\ ;\ y_0)$. Phép đối xứng tâm $Đ_I$ biến đường thẳng Δ thành đường thẳng Δ'. Viết phương trình của Δ'.