§6 PHÉP VỊ TỰ

Hin-be (Hilbert)

Ai đây ?

Chúng ta hãy quan sát hai bức chân dung ở hình vẽ trên. Tuy kích thước của chúng khác nhau nhưng hình dạng của chúng rất "giống nhau" (ta nói chúng "đồng dạng" với nhau). Vì bức nhỏ hơn là chân dung của nhà toán học Hin-be, nên bức lớn hơn cũng là chân dung của nhà toán học đó.

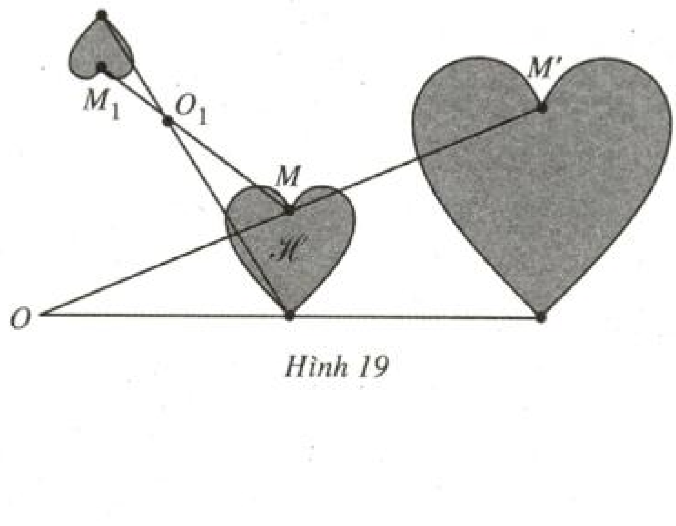
Sau đây, chúng ta sẽ nói về các phép biến hình không làm thay đổi hình dạng của hình. Trước hết, trong bài này, ta nói đến phép vị tự, một trường hợp riêng của những phép biến hình như thế.

1. Định nghĩa

> *Cho một điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là* ***phép vị tự tâm O tỉ số k.***

Ta thường kí hiệu phép vị tự bởi chữ V, nếu cần nói rõ tâm O và tỉ số k của nó thì ta kí hiệu là $V_{(O,\,k)}$.

Hình 19 cho ta thấy phép vị tự tâm O tỉ số $k = 2$ và phép vị tự tâm O_1 tỉ số $k_1 = -\dfrac{1}{2}$ biến hình $\mathscr{H}$ thành các hình như thế nào.



Hình 19

. Các tính chất của phép vị tự

ĐỊNH LÍ 1

Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|MN.$$

Chứng minh

Nếu O là tâm của phép vị tự thì theo định nghĩa, ta có $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}$.

Vậy $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{ON} - k\overrightarrow{OM} = k(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{MN}$.

Từ đó suy ra $M'N' = |k|MN$. □

ĐỊNH LÍ 2

Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

Chứng minh

Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng mà B nằm giữa A và C, tức là $\overrightarrow{BA} = m\overrightarrow{BC}$ với $m < 0$. Nếu phép vị tự tỉ số k biến A, B, C lần lượt thành A', B', C' thì theo định lí 1, ta có $\overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{B'A'} = k\overrightarrow{BA} = k(m\overrightarrow{BC}) = m(k\overrightarrow{BC}) = m\overrightarrow{B'C'}$, tức là ba điểm A', B', C' thẳng hàng với B' nằm giữa A' và C'. □

HỆ QUẢ

Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

?1 *Những đường thẳng nào biến thành chính nó qua phép vị tự với tỉ số $k \neq 1$?*

Những đường tròn nào biến thành chính nó qua phép vị tự với tỉ số $k \neq 1$?

3. Ảnh của đường tròn qua phép vị tự

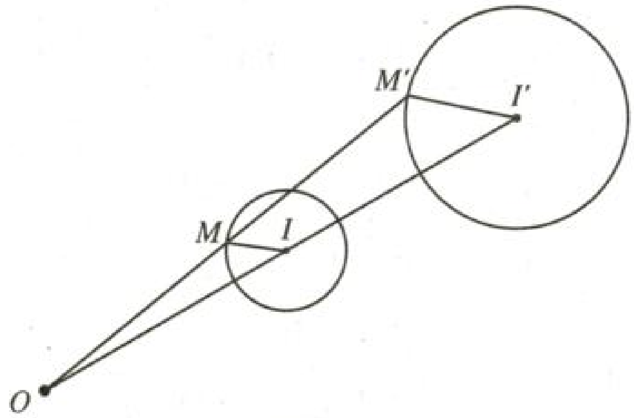
ĐỊNH LÍ 3

Phép vị tự tỉ số k biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $|k|R$.

Chứng minh (h.20)

Giả sử V là phép vị tự tâm O tỉ số k và $(I\ ;\ R)$ là đường tròn đã cho. Gọi I' là ảnh của I và M' là ảnh của điểm M bất kì thì ta có $I'M' = |k|IM$.

Bởi vậy $IM = R$ khi và chỉ khi $I'M' = |k|R$ hay là M' thuộc đường tròn $(I'\ ;\ R')$ với $R' = |k|R$. Đó chính là ảnh của đường tròn $(I\ ;\ R)$ qua phép vị tự V. □



Hình 20

1

Trên hình 20, hãy vẽ một đường thẳng d qua tâm vị tự O, cắt đường tròn $(I\ ;\ R)$ tại A và B, cắt đường tròn $(I'\ ;\ R')$ tại C và D. Hãy nói rõ các điểm A và B được biến thành những điểm nào qua phép vị tự đó, và giải thích tại sao.

Nếu đường thẳng d nói trên tiếp xúc với đường tròn $(I\ ;\ R)$ thì d có tiếp xúc với đường tròn $(I'\ ;\ R')$ hay không ? Nhận xét gì về các tiếp điểm ?

4. Tâm vị tự của hai đường tròn

Ta đã biết rằng phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn. Bây giờ ta xét bài toán ngược lại.

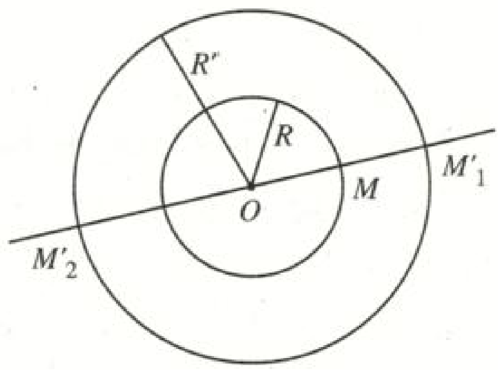
Bài toán 1

Cho hai đường tròn $(I\ ;\ R)$ và $(I'\ ;\ R')$ phân biệt. Hãy tìm các phép vị tự biến đường tròn $(I\ ;\ R)$ thành đường tròn $(I'\ ;\ R')$.

Giải

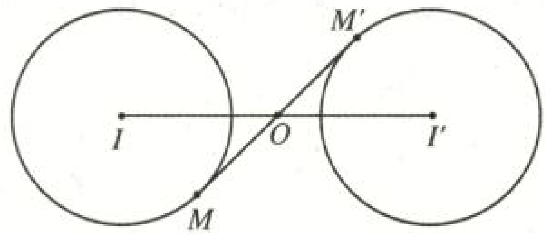
Trước hết, ta có nhận xét : Nếu phép vị tự tâm O tỉ số k biến $(I\ ;\ R)$ thành $(I'\ ;\ R')$ thì $|k| = \dfrac{R'}{R}$ hay $k = \pm\dfrac{R'}{R}$ và $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$. Từ đó ta xác định được các phép vị tự mà bài toán yêu cầu. Cụ thể là :

Trường hợp hai đường tròn $(I\ ;\ R)$ *và* $(I'\ ;\ R')$ *đồng tâm*, $R \neq R'$, hiển nhiên khi đó O trùng với I. Vậy ta có hai phép vị tự : phép vị tự V_1 tâm I tỉ số $\dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự V_2 tâm I tỉ số $-\dfrac{R'}{R}$. (Trên hình 21, phép vị tự V_1 biến M thành M'_1 và phép vị tự V_2 biến M thành M'_2).



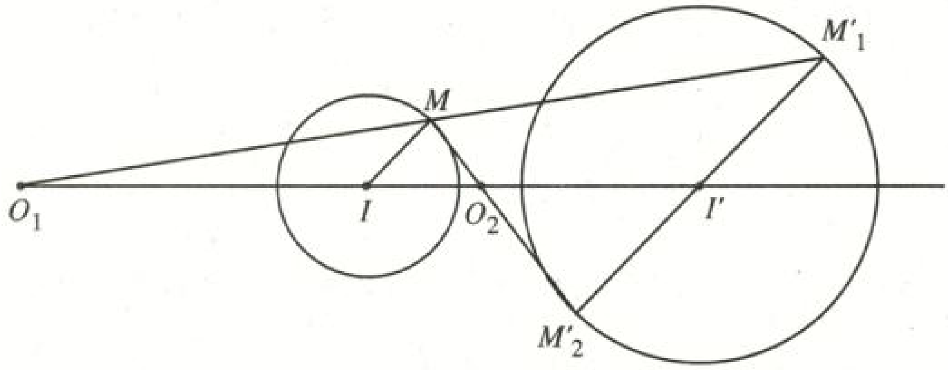
Hình 21

Trường hợp I không trùng với I' nhưng $R = R'$, *tức là* $k = \pm 1$, khi đó điểm O phải thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{OI'} = k\overrightarrow{OI}$ nên k chỉ có thể bằng -1, và O là trung điểm của đoạn thẳng II'. Vậy trong trường hợp này chỉ có một phép vị tự : tâm O, tỉ số -1, đó cũng chính là phép đối xứng qua điểm O (h.22).



Hình 22

Trường hợp I không trùng I' và $R \neq R'$, ta có thể xác định các phép vị tự như sau (h.23) :



Hình 23

Ta lấy $M'_1M'_2$ là một đường kính của $(I'\ ;\ R')$ và IM là một bán kính của $(I\ ;\ R)$ sao cho hai vectơ $\overrightarrow{I'M'_1}$ và $\overrightarrow{IM}$ cùng hướng. Đường thẳng II' cắt MM'_1 và MM'_2 lần lượt tại O_1 và O_2.

Khi đó phép vị tự V_1 tâm O_1 tỉ số $k_1 = \dfrac{R'}{R}$ và phép vị tự V_2 tâm O_2 tỉ số $k_2 = -\dfrac{R'}{R}$ đều biến đường tròn $(I\ ;\ R)$ thành đường tròn $(I'\ ;\ R')$. □

Thuật ngữ

Nếu có phép vị tự tâm O biến đường tròn này thành đường tròn kia thì O được gọi là ***tâm vị tự của hai đường tròn** đó*.

Nếu phép vị tự đó có tỉ số dương thì điểm O gọi là ***tâm vị tự ngoài***, nếu phép vị tự đó có tỉ số âm thì điểm O gọi là ***tâm vị tự trong***.

Trên hình 23, hai đường tròn $(I\ ;\ R)$ và $(I'\ ;\ R')$ có O_1 là tâm vị tự ngoài, O_2 là tâm vị tự trong.

5. Ứng dụng của phép vị tự

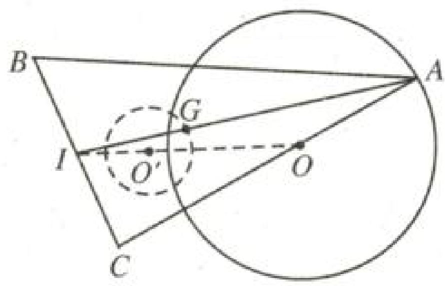
Bài toán 2

Tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định còn đỉnh A chạy trên một đường tròn (O ; R) cố định không có điểm chung với đường thẳng BC. Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải (h.24)

Gọi I là trung điểm của BC thì I cố định. Điểm G là trọng tâm tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}.$$



Hình 24

Như vậy phép vị tự V tâm I tỉ số $\frac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G. Từ đó suy ra khi A chạy trên đường tròn $(O\ ;\ R)$ thì quỹ tích G là ảnh của đường tròn đó qua phép vị tự V, tức là đường tròn $(O'\ ;\ R')$ mà $\overrightarrow{IO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IO}$ và $R' = \frac{1}{3}R$. □

Bài toán 3

Cho tam giác ABC với trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ *(như vậy khi ba điểm G, H, O không trùng nhau thì chúng cùng nằm trên một đường thẳng, được gọi là đường thẳng Ơ-le).*

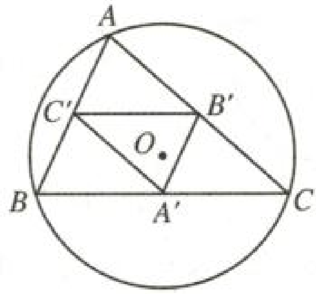
2 (Để giải bài toán 3)

Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC (h.25).

1) Hãy chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.

2) Gọi V là phép vị tự tâm G, tỉ số -2. Hãy tìm ảnh của tam giác $A'B'C'$ qua V.

3) Qua phép vị tự V, điểm O biến thành điểm nào ? Vì sao ? Từ đó suy ra kết luận của bài toán.



Hình 25

?2 *Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Qua phép vị tự V nói trên, điểm O' biến thành điểm nào ?*

Câu hỏi và bài tập

25. Các phép sau đây có phải là phép vị tự hay không : phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép đồng nhất, phép tịnh tiến theo vectơ khác $\vec{0}$?

26. Các khẳng định sau đây có đúng không ?

a) Phép vị tự luôn có điểm bất động (tức là điểm biến thành chính nó).

b) Phép vị tự không thể có quá một điểm bất động.

c) Nếu phép vị tự có hai điểm bất động phân biệt thì mọi điểm đều bất động.

27. Xác định tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của hai đường tròn trong các trường hợp sau :

a) Hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau.

b) Hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.

c) Một đường tròn chứa đường tròn kia.

28. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt (O) ở M và cắt (O') ở N sao cho M là trung điểm của AN.

29. Cho đường tròn $(O\ ;\ R)$ và điểm I cố định khác O. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Tia phân giác của góc MOI cắt IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N.

30. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường tròn (O'') thay đổi, luôn luôn tiếp xúc ngoài với (O) và (O') lần lượt tại B và C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.