ÔN TẬP CHƯƠNG II

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Một mặt phẳng được xác định nếu biết một trong các điều kiện sau đây :

a) Mặt phẳng đó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

b) Mặt phẳng đó đi qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm ấy.

c) Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

d) Mặt phẳng đó đi qua hai đường thẳng song song.

e) Mặt phẳng đó đi qua một đường thẳng và song song với một đường thẳng chéo với đường thẳng ấy.

f) Mặt phẳng đó đi qua một điểm và song song với một mặt phẳng không chứa điểm ấy.

2. Định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng :

Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

3. Ba đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện của một tứ diện đồng quy tại trung điểm G của mỗi đoạn. Điểm G đó gọi là trọng tâm của tứ diện.

4. Đường thẳng và mặt phẳng song song (tức là chúng không có điểm chung) :

a) Đường thẳng a (không nằm trên mp(P)) song song với mp(P) khi và chỉ khi nó song song với một đường thẳng nằm trong (P).

b) Nếu mp(Q) đi qua đường thẳng a mà a song song với mp(P) thì giao tuyến của mp(P) và mp(Q) (nếu có) song song với a.

c) Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.

5. Hai mặt phẳng song song (tức là chúng không có điểm chung) :

a) Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mp(Q) thì $(P) // (Q)$.

b) Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song thì mọi mp(R) đã cắt (P) thì cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song.

c) Định lí Ta-lét : Ba mặt phẳng đôi một song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

d) Định lí Ta-lét đảo : Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau a và a' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho : $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$. Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

6. Hình chóp có đáy là một đa giác và các mặt bên đều là những tam giác có chung một đỉnh (đỉnh của hình chóp).

7. Hình lăng trụ có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là những hình bình hành ; các cạnh bên bằng nhau và đôi một song song.

8. Hình hộp là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành ; bốn đường chéo của hình hộp đồng quy tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.

9. Hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song ; các mặt bên đều là hình thang ; các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

10. Phép chiếu song song theo phương l :

a) Không làm thay đổi sự thẳng hàng và thứ tự của các điểm thẳng hàng.

b) Biến hai đường thẳng song song (nhưng không song song với l) thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

c) Giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

11. Hình biểu diễn của một hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Hình biểu diễn của đường tròn thường là đường elip hoặc đường tròn.

II - Câu hỏi tự kiểm tra

1. Hãy nêu sự khác biệt giữa hai đường thẳng chéo nhau và hai đường thẳng song song.

2. Nêu phương pháp chứng minh ba điểm thẳng hàng.

3. Nêu phương pháp chứng minh ba đường thẳng đồng quy.

4. Nêu phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.

5. Nêu phương pháp chứng minh hai mặt phẳng song song.

III - Bài tập

1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung ;

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau ;

c) Hai đường thẳng chéo nhau thì không cùng thuộc một mặt phẳng ;

d) Hai đường thẳng không song song thì chéo nhau.

2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau ;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì song song với nhau ;

c) Hai mặt phẳng phân biệt không song song thì cắt nhau ;

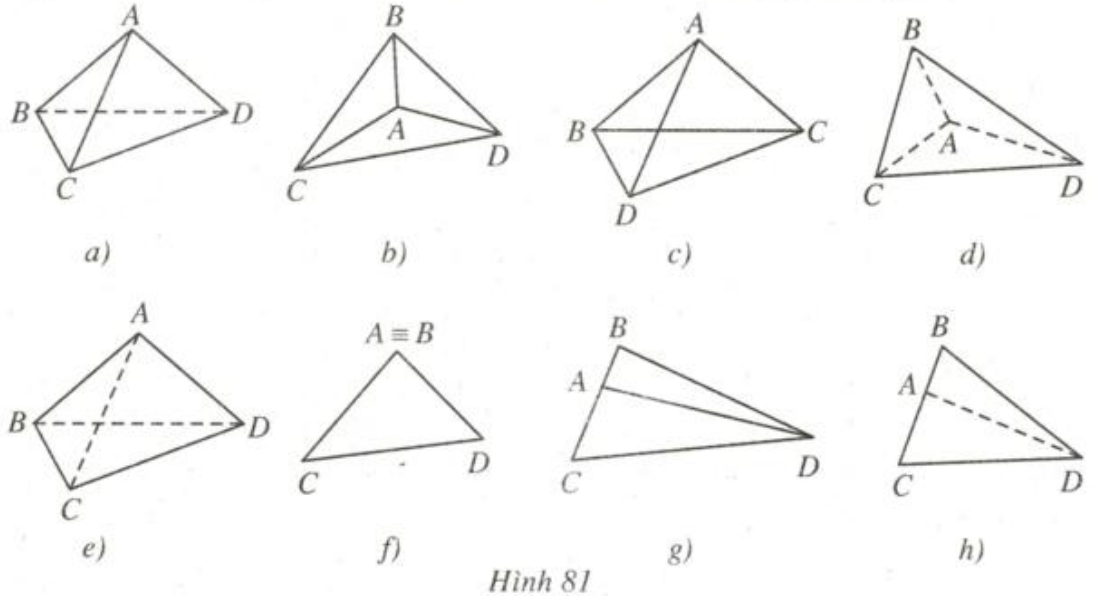
d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau ;

e) Một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại ;

f) Một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì cắt đường thẳng còn lại ;

g) Một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cắt mặt phẳng còn lại.

3. Trong các hình sau, hình nào là hình biểu diễn của một tứ diện ?



Hình 81

4. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Lấy các điểm M, N lần lượt thuộc các đường chéo AC, BF sao cho $MC = 2AM$; $NF = 2BN$. Qua M, N, kẻ các đường thẳng song song với AB cắt các cạnh AD, AF lần lượt tại M_1, N_1. Chứng minh rằng :

a) $MN \parallel DE$;

b) $M_1N_1 \parallel \text{mp}(DEF)$;

c) $\text{mp}(MNN_1M_1) \parallel \text{mp}(DEF)$.

5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng :

a) GG' song song và bằng cạnh bên của hình lăng trụ ;

b) G_1 là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$;

c) $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$; $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Vẽ thiết diện của hình hộp tạo bởi mặt phẳng đi qua hai trung điểm M, N của các cạnh AB, AD và tâm O của mặt $CDD'C'$.

7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{D'N}{D'D} = \frac{B'P}{B'C'}$.

a) Chứng minh rằng $\text{mp}(MNP)$ và $\text{mp}(AB'D')$ song song với nhau.

b) Xác định thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $\text{mp}(MNP)$.

8. Cho hai tia Ax và By nằm trên hai đường thẳng chéo nhau. Một điểm M chạy trên Ax và một điểm N chạy trên By sao cho $AM = kBN$ ($k > 0$ cho trước).

a) Chứng minh rằng MN song song với một mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp các điểm I thuộc đoạn MN sao cho $IM = kIN$.

IV - Các câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC ; G là trọng tâm tam giác BCD. Khi ấy, giao điểm của đường thẳng MG và $\text{mp}(ABC)$ là :

(A) Điểm C ;

(B) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN ;

(C) Điểm N ;

(D) Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.

2. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm E, F, G lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC, AD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(EFG) là :

(A) Một đoạn thẳng ; (B) Một tam giác ;

(C) Một tứ giác ; (D) Một ngũ giác.

3. Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm I, J, K lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CD mà không trùng với các đỉnh. Thiết diện của hình tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi mp(IJK) là :

(A) Một tam giác ; (B) Một tứ giác ;

(C) Một hình thang ; (D) Một ngũ giác.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi $AC \cap BD = I$, $AB \cap CD = J$, $AD \cap BC = K$. Đẳng thức nào **sai** trong các đẳng thức sau đây ?

(A) $(SAC) \cap (SBD) = SI$; (B) $(SAB) \cap (SCD) = SJ$;

(C) $(SAD) \cap (SBC) = SK$; (D) $(SAC) \cap (SAD) = AB$.

5. Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng không đi qua đỉnh nào của hình chóp cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

(A) Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$, SO đôi một chéo nhau ;

(B) Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$, SO đồng phẳng ;

(C) Các đường thẳng $A'C'$, $B'D'$, SO đồng quy ;

(D) Hai đường thẳng $A'C'$ và $B'D'$ cắt nhau còn hai đường thẳng $A'C'$ và SO chéo nhau.

6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

(A) Đường thẳng GE song song với đường thẳng CD ;

(B) Đường thẳng GE cắt đường thẳng CD ;

(C) Hai đường thẳng GE và CD chéo nhau ;

(D) Đường thẳng GE cắt đường thẳng AD.

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và AC, N là điểm trên cạnh BD sao cho $BN = 2ND$. Gọi F là giao điểm của AD và mp(MNK). Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) $AF = FD$; (B) $AF = 2FD$;

(C) $AF = 3FD$; (D) $FD = 2AF$.

8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mp(GCD) thì diện tích của thiết diện là :

(A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$;

(C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$; (D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CB. Khi ấy, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng song song với :

(A) Đường thẳng AD ; (B) Đường thẳng BJ ;

(C) Đường thẳng BI ; (D) Đường thẳng IJ.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC và SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây :

(A) $A'B'$ // mp(SAD) ; (B) $A'C'$ // mp(SBD) ;

(C) mp($A'C'D'$) // mp(ABC) ; (D) $A'C'$ // BD.

11. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = m$ $(0 < m < a)$. Khi đó, diện tích thiết diện của hình tứ diện khi cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với mp(ACD) là :

(A) $\frac{m^2\sqrt{3}}{4}$; (B) $\frac{(a-m)^2\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\frac{(a+m)^2\sqrt{3}}{4}$; (D) $\frac{(a-m)^2\sqrt{3}}{4}$.

12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) song song với AC và SB lần lượt cắt các cạnh SA, AB, BC, SC, SD, BD tại M, N, E, F, I, J. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

(A) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đôi một song song ;

(B) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng quy ;

(C) Bốn đường thẳng MN, EF, IJ, SB đồng phẳng ;

(D) Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Bài đọc thêm

PHƯƠNG PHÁP TIÊN ĐỀ TRONG HÌNH HỌC

1. Khi mới ra đời, Hình học là môn khoa học thực nghiệm nảy sinh từ việc đo đạc, tính toán các đại lượng về khoảng cách giữa các địa điểm, diện tích các đám đất, thể tích các thùng chứa,... Thời cổ đại, người vùng Ba-bi-lon và Ai Cập đã tích luỹ được nhiều kiến thức hình học khá phong phú, chẳng hạn công thức Py-ta-go, định lí Ta-lét, công thức tính thể tích hình chóp cụt,... Dần dần Hình học trở thành một khoa học suy diễn, tức là thay vì dùng thực nghiệm để kiểm tra sự đúng đắn của các sự kiện hình học, người ta chứng minh bằng lập luận. Có nhiều tác phẩm hình học đã ra đời, nhưng nổi tiếng nhất và còn được giữ lại đến nay là tập "Cơ bản" của Ơ-clít (Euclid, nhà toán học Hy Lạp, sống vào khoảng thế kỉ thứ ba trước Công nguyên).

Tập "Cơ bản" của Ơ-clít gồm 13 cuốn, trong đó có 8 cuốn nói về Hình học. Toàn bộ nội dung môn Hình học sơ cấp của bậc Phổ thông ngày nay là một phần trong tác phẩm đó. Công lao to lớn của Ơ-clít là đã tập hợp lại những kết quả của nhiều tác giả trước, sắp xếp lại và chứng minh chặt chẽ. Để xây dựng môn Hình học, Ơ-clít đã xuất phát từ 10 tiên đề và định đề được thừa nhận là đúng mà không chứng minh. Từ đó, dựa vào các suy luận lôgic, ông đã chứng minh các định lí khác.

Như vậy, có thể nói Ơ-clít là người đặt nền móng cho phương pháp xây dựng Hình học mà ngày nay ta gọi là phương pháp tiên đề.

Để trình bày môn Hình học theo phương pháp tiên đề, người ta làm như sau :

1) Không định nghĩa một số khái niệm như : điểm, đường thẳng, mặt phẳng, điểm nằm giữa hai điểm, độ dài đoạn thẳng, độ lớn của góc,... Các khái niệm như vậy gọi là *các khái niệm cơ bản*. Các khái niệm khác sẽ được định nghĩa dựa vào những khái niệm cơ bản. Chẳng hạn, sự bằng nhau của các tam giác được định nghĩa dựa vào sự bằng nhau của các đoạn thẳng và sự bằng nhau của các góc.

2) Nêu ra một số mệnh đề được thừa nhận là đúng mà không chứng minh. Các mệnh đề như thế gọi là *tiên đề*. Chẳng hạn ta thừa nhận tiên đề : *"Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước"* hoặc tiên đề : *"Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước"*.

Mọi mệnh đề khác đều phải được chứng minh dựa vào các tiên đề và các mệnh đề đã được chứng minh trước đó.

Chúng ta cần chú ý rằng tuy điểm, đường thẳng, mặt phẳng không được định nghĩa, nhưng chúng buộc phải thoả mãn các tiên đề. Cho nên có thể nói chúng được định nghĩa một cách gián tiếp qua các tiên đề.

Euclid (khoảng 330 - 275 TCN)

Lobachevsky (1792 - 1856)

2. Trong hệ thống các tiên đề hình học có một tiên đề gọi là tiên đề Ơ-clít (nó tương đương với định đề V trong tác phẩm Cơ bản của Ơ-clít). Tiên đề đó được phát biểu như sau : *"Cho điểm A không nằm trên đường thẳng b thì trong mặt phẳng (A,b) chỉ có một đường thẳng đi qua A và không cắt b".*

Trong lịch sử, khi nghiên cứu các tiên đề của Ơ-clít, nhất là định đề V nói trên, các nhà toán học đã nghi ngờ rằng có thể chứng minh được nó dựa vào các tiên đề khác và nếu quả thật như vậy thì cần phải loại nó ra khỏi danh sách các tiên đề. Nhiều nhà toán học nổi tiếng như : Xác-kê-ri (Saccheri, 1667 - 1733), Lăm-be (Lambert, 1728 - 1777), Lơ-giăng-đơ-rơ (Legendre,1752 - 1833),... đã tốn nhiều sức lực và trí tuệ để tìm cách chứng minh định đề V nhưng không thành công. Vào đầu thế kỉ XIX, các nhà toán học : Gau-xơ (Gauss, 1777 - 1855), Bô-li-ai (Bolyai, 1802 - 1860), đặc biệt là nhà toán học Nga Lô-ba-sép-xki (Lobachevsky), trong quá trình chứng minh định đề V của Ơ-clít, đã xây dựng một Hình học mới trong đó không thừa nhận định đề V mà thừa nhận tiên đề phủ định định đề V : *"Cho điểm A không nằm trên đường thẳng b thì trong mặt phẳng (A,b) có ít nhất hai đường thẳng đi qua A và không cắt b".*

Ngày nay, người ta thường gọi hình học đó là ***Hình học Lô-ba-sép-xki*** (một loại Hình học phi Ơ-clít).

Năm mươi năm sau khi Lô-ba-sép-xki công bố tác phẩm nói trên, người ta chứng minh được rằng Hình học Lô-ba-sép-xki không hề có mâu thuẫn và như vậy, tiên đề Ơ-clít đúng là một tiên đề.

Ngày nay, phương pháp tiên đề đã thâm nhập vào nhiều ngành toán học khác nhau và nó là một công cụ quan trọng trong việc xây dựng nên những bộ môn toán học hiện đại.