

ÔN TẬP CHƯƠNG III

I - Tóm tắt những kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa vectơ và các phép toán vectơ trong không gian cũng giống như trong mặt phẳng. Ngoài ra :
 - a) Ba vectơ gọi là đồng phẳng khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
 - b) Điều kiện cần và đủ để ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} đồng phẳng là có ba số m , n , p không đồng thời bằng 0 sao cho $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$.
 - c) Nếu ba vectơ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} không đồng phẳng thì mỗi vectơ \vec{d} đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với các số m , n , p duy nhất.
2. Hai đường thẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .
3. – Một đường thẳng gọi là vuông góc với một mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng trong mặt phẳng đó.
 - Đường thẳng a vuông góc với $mp(P)$ khi và chỉ khi a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng nằm trong (P) .
 - Định lí ba đường vuông góc : Đường thẳng b nằm trên $mp(P)$ vuông góc với đường thẳng a (a không vuông góc với (P)) khi và chỉ khi nó vuông góc với hình chiếu (vuông góc) của a trên (P) .
 - Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng và hình chiếu của đường thẳng đó trên mặt phẳng (nếu hình chiếu đó là một điểm thì xem góc giữa đường thẳng và mặt phẳng bằng 90°).

4. – Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .
 - Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
5. – Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (đường thẳng) là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó trên mặt phẳng (đường thẳng).
- Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P) .
 - Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
6. – Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b là độ dài của đoạn vuông góc chung IJ , trong đó I, J là các giao điểm của đường vuông góc chung của a và b với a và b .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó, chứa đường thẳng còn lại.
 - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.
7. – Mặt phẳng đi qua trung điểm O của đoạn thẳng AB và vuông góc với AB gọi là mặt phẳng trung trực của AB .
- Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng đó.
 - Tập hợp các điểm cách đều ba đỉnh của tam giác ABC là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) và đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Đường thẳng đó được gọi là *trục của tam giác* ABC .

II - Câu hỏi tự kiểm tra

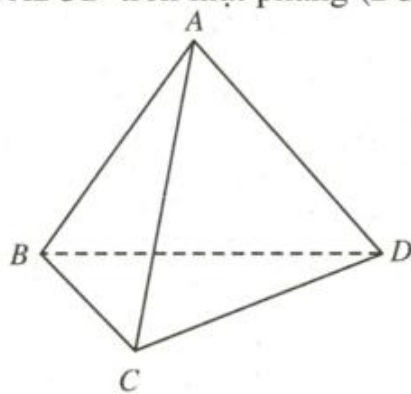
1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện và A' là trọng tâm tam giác BCD . Các khẳng định sau đúng hay sai ?
- a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;
 - b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$ với M là một điểm tùy ý ;
 - c) $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$;
 - d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AA'}$.

2. Trong không gian, hãy nêu cách chứng minh :
 - a) Đường thẳng vuông góc với đường thẳng ;
 - b) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ;
 - c) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
3. Hãy nêu cách tính :
 - a) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng ;
 - b) Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ;
 - c) Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nó ;
 - d) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song ;
 - e) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

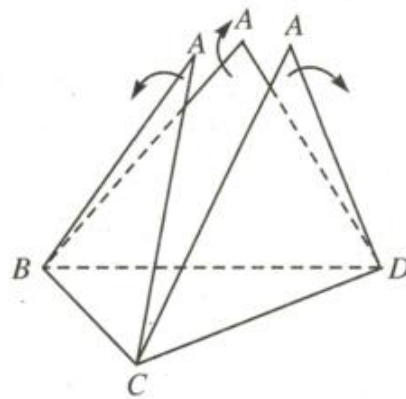
III - Bài tập

1. Tứ diện $OABC$ có $OA = OB = OC = a$ và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^\circ$, $\widehat{BOC} = 90^\circ$.
 - a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông và $OA \perp BC$.
 - b) Tìm đường vuông góc chung IJ của OA và BC ; tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC .
 - c) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.
2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$.
 - a) Chứng tỏ rằng ABC là tam giác vuông.
 - b) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) .
3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD , đặt $CM = x$, $CN = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để :
 - a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45° ;
 - b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.
4. Tam giác ABC vuông có cạnh huyền BC nằm trong $mp(P)$, cạnh AB và AC lần lượt tạo với $mp(P)$ các góc β và γ . Gọi α là góc tạo bởi $mp(P)$ và $mp(ABC)$. Chứng minh rằng $\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$.
5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (ABC) . Tính diện tích các tam giác HAB, HBC và HCA .
6. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh C , $CA = a$, $CB = b$; mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB' .

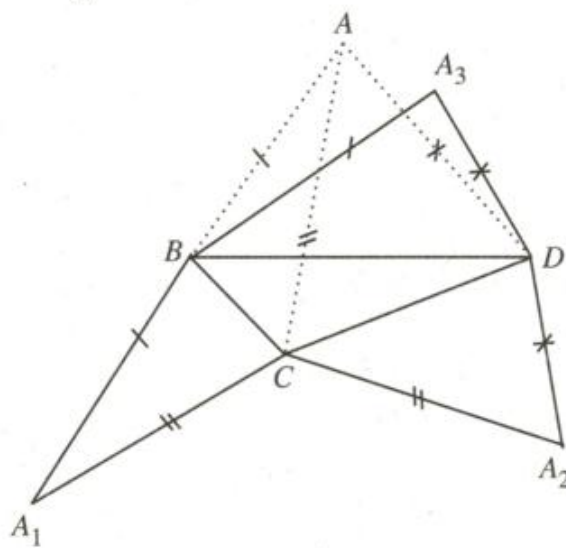
- a) Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P) . Thiết diện là hình gì ?
- b) Tính diện tích thiết diện nói trên.
7. Một tứ diện được gọi là **gân đều** nếu các cạnh đối bằng nhau từng đôi một. Với tứ diện $ABCD$, chứng tỏ các tính chất sau là tương đương :
- a) Tứ diện $ABCD$ là gân đều ;
- b) Các đoạn thẳng nối trung điểm cặp cạnh đối diện đôi một vuông góc với nhau ;
- c) Các **trọng tuyến** (đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm mặt đối diện) bằng nhau ;
- d) Tổng các góc tại mỗi đỉnh bằng 180° .
8. Cho tứ diện $ABCD$. Cắt tứ diện đó theo các cạnh AB, AC, AD và trải các mặt ABC, ACD, ADB lên mặt phẳng (BCD) (xem hình 133). Hình phẳng gồm các tam giác BCD, A_1BC, A_2CD, A_3BD gọi là **hình khai triển** của tứ diện $ABCD$ trên mặt phẳng (BCD) .



a)



b)



c)
Hình 133

a) Chứng tỏ hình khai triển của tứ diện đều $ABCD$ trên mp(BCD) làm thành một tam giác nhọn.

b) Dùng bìa cứng cắt và dán để có một tứ diện đều.

IV - Các câu hỏi trắc nghiệm

1. Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G . Mệnh đề nào sau đây là sai ?

(A) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$; (B) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

(C) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$; (D) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

2. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau ;

(B) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau ;

(C) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng kia ;

(D) Một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng vuông góc với nhau thì song song với đường thẳng còn lại.

3. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai ?

(A) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$; (B) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$;

(C) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$; (D) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.

4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :

(A) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song ;

(B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song ;

(C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song ;

(D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

5. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

(A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia ;

- (B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau ;
- (C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau ;
- (D) Ba mệnh đề trên đều sai.
6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước ;
- (B) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một đường thẳng cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;
- (C) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước ;
- (D) Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
7. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :
- (A) Nếu hình hộp có hai mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật ;
- (B) Nếu hình hộp có ba mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật ;
- (C) Nếu hình hộp có bốn mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật ;
- (D) Nếu hình hộp có năm mặt là hình chữ nhật thì nó là hình hộp chữ nhật.
8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?
- (A) Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương ;
- (B) Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương ;
- (C) Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương ;
- (D) Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
9. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :
- (A) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân ;
- (B) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên của nó là tam giác cân với đỉnh S ;
- (C) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu góc giữa các mặt phẳng chứa các mặt bên và mặt phẳng chứa đáy bằng nhau ;
- (D) $S.ABC$ là hình chóp đều nếu các mặt bên có diện tích bằng nhau.
10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau :
- (A) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì nằm trong mặt phẳng chứa đường thẳng này và vuông góc với đường thẳng kia ;

- (B) Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau thì vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia ;
- (C) Một đường thẳng là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau nếu nó vuông góc với cả hai đường thẳng đó ;
- (D) Các mệnh đề trên đều sai.

11. Hình tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc và $AB = AC = AD = 3$. Diện tích tam giác BCD bằng

- (A) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{9\sqrt{2}}{3}$; (C) 27 ; (D) $\frac{27}{2}$.

12. Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = AD = a$ và $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Khi đó, khoảng cách giữa các đường thẳng chứa các cạnh đối diện của tứ diện $A'ABD$ bằng :

- (A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (C) $a\sqrt{2}$; (D) $\frac{3a}{2}$.