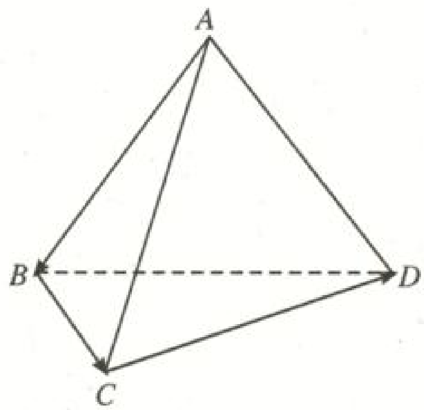
§1 VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. SỰ ĐỒNG PHẲNG CỦA CÁC VECTƠ

1. Vectơ trong không gian

Khái niệm vectơ và các phép toán vectơ đã được đề cập trong chương trình hình học lớp 10. Tuy nhiên, khi đó tất cả các vectơ mà chúng ta xem xét đều nằm trên cùng một mặt phẳng.

Ở chương II, chúng ta đã làm quen với việc nghiên cứu hình học không gian mà đối tượng của nó là các hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chẳng hạn, tứ diện $ABCD$ là một hình có tính chất đó và như thế các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ không cùng nằm trong một mặt phẳng nào cả (h.82).



Hình 82

Trong chương này, chúng ta sẽ nói đến các vectơ trong không gian. Vectơ, các phép toán vectơ trong không gian được định nghĩa hoàn toàn giống như trong mặt phẳng, chúng cũng có các tính chất đã biết nên không nhắc lại. Sau đây, chúng ta nêu lên một số hoạt động và ví dụ nhằm mục đích ôn tập lại những kiến thức đã có về vectơ trong mặt phẳng để áp dụng vào không gian.

1

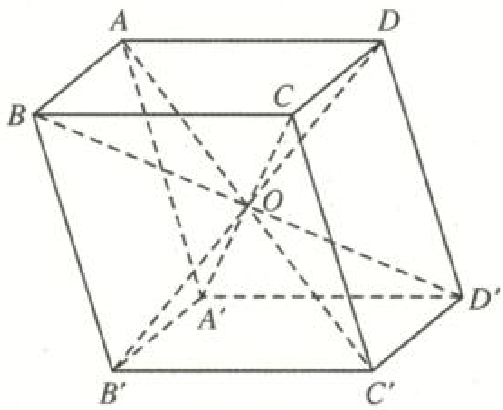
Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với tâm O (h.83).

a) Hãy chỉ ra trên hình 83 những vectơ bằng nhau khác vectơ $\vec{0}$ và kiểm tra tính đúng đắn của đẳng thức

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}. \quad (1)$$

b) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'C}.$$



Hình 83

CHÚ Ý

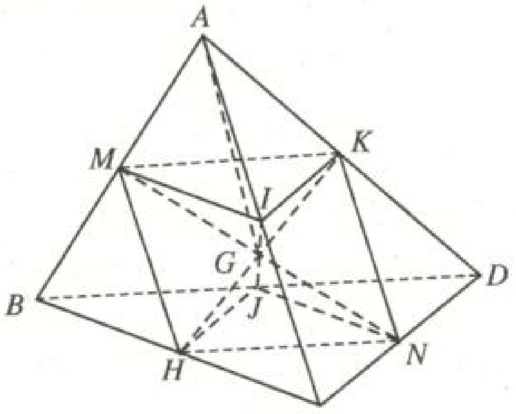
Công thức (1) gọi là ***quy tắc hình hộp*** (để tìm tổng của ba vectơ).

2

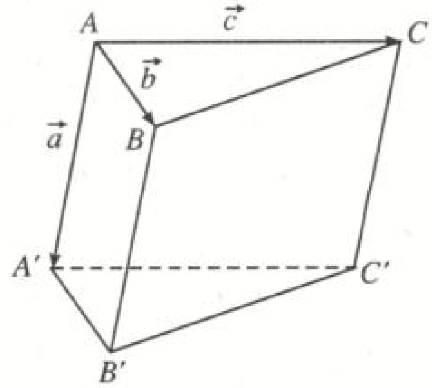
Cho tứ diện $ABCD$ với trọng tâm G và các trung điểm các cạnh của nó (h.84). Hãy chỉ ra trên hình 84 những vectơ khác $\vec{0}$ bằng nhau và kiểm tra xem đẳng thức

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$$

có đúng không ?



Hình 84



Hình 85

3

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ (h.85).

1) Hãy biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

2) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG'}$ qua $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ví dụ 1

Cho tứ diện ABCD.

1. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng tỏ rằng

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

2. Chứng minh rằng điểm G là trọng tâm của tứ diện ABCD khi và chỉ khi một trong hai điều kiện sau xảy ra :

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$ *với mọi điểm P.*

Giải (h.86)

1. Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN},$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}.$$

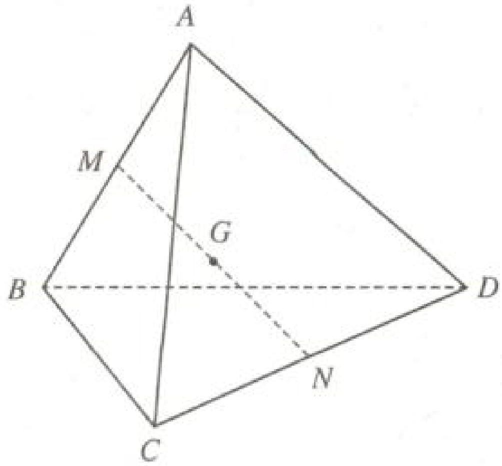
Do $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

và $\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

nên $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$.

Tương tự như trên, ta có

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$



Hình 86

2. a) Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM},$$

$$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}.$$

Điểm G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0} \text{ hay } 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}.$$

Điều này tương đương với $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Điều này có nghĩa là với điểm P bất kì, ta có

$$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PG} + \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PG} = \vec{0},$$

hay $$\overrightarrow{PG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}).$$ □

Ví dụ 2

Cho tứ diện ABCD có $AB = c$, $CD = c'$, $AC = b$, $BD = b'$, $BC = a$, $AD = a'$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

Giải. Ta có

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BC}.(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}$$

$$= \frac{1}{2}(CB^2 + CD^2 - BD^2) - \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2)$$

$$= \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2 - BD^2 - CA^2).$$

Từ đó góc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$ xác định bởi

$$\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA}) = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}.$$ □

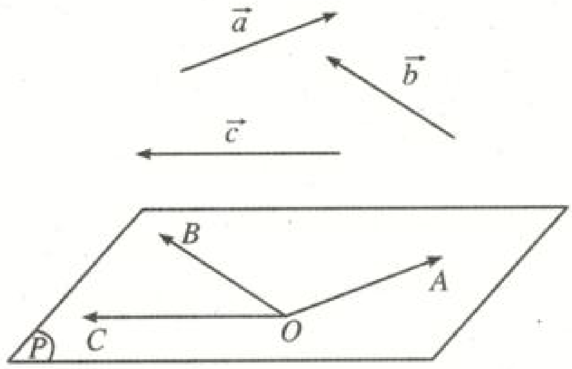
. Sự đồng phẳng của các vectơ. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Ta biết rằng, với hai đường thẳng phân biệt cho trước trong không gian, luôn có mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó. Nhưng nói chung, không có mặt phẳng song song với ba đường thẳng phân biệt cho trước. Nếu có mặt phẳng như vậy thì ta nói rằng ba vectơ nằm trên ba đường thẳng ấy là đồng phẳng.

ĐỊNH NGHĨA

*Ba vectơ gọi là **đồng phẳng** nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.*

Trên hình 87, giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều song song với mặt phẳng (P) nên ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.



Hình 87

Nhận xét

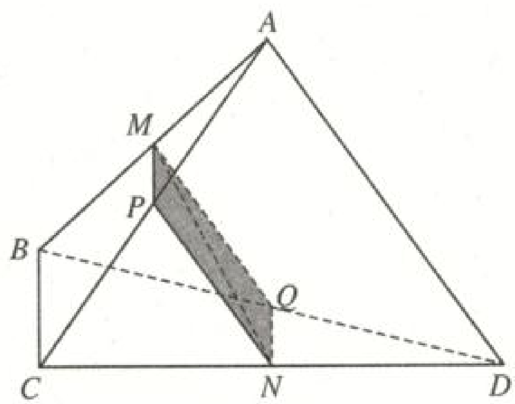
Từ định nghĩa trên, suy ra : Nếu ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi bốn điểm O, A, B, C cùng nằm trên một mặt phẳng hay ba đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài toán 1

Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

4 (Để giải bài toán 1)

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AC và BD. Khi đó $MPNQ$ là hình bình hành. Từ đó, hãy suy ra điều phải chứng minh (h.88).



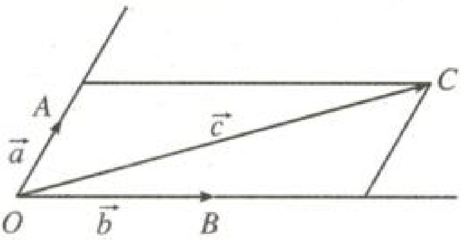
Hình 88

Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Từ định nghĩa ba vectơ đồng phẳng và sự khai triển một vectơ theo hai vectơ không cùng phương trong hình học phẳng, chúng ta có thể chứng minh được định lí sau (h.89).

ĐỊNH LÍ 1

Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m, n là duy nhất.



Hình 89

5

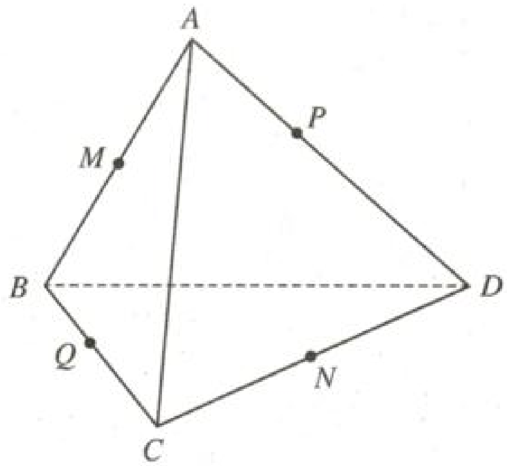
Chứng minh rằng

1) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong ba số m, n, p khác không thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng ;

2) Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

Bài toán 2

Cho tứ diện ABCD. Các điểm M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng (h.90).



Hình 90

6 (Để giải bài toán 2)

1) Từ hệ thức $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}$, hãy chứng tỏ

$$\overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}.$$

2) Từ hai đẳng thức trên, chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}.$$

Vậy các điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Định lí 1 nói đến điều kiện để có thể biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương. Định lí dưới đây sẽ nói về biểu thị một vectơ qua ba vectơ không đồng phẳng.

ĐỊNH LÍ 2

Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được các số m, n, p sao cho $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Hơn nữa, các số m, n, p là duy nhất.

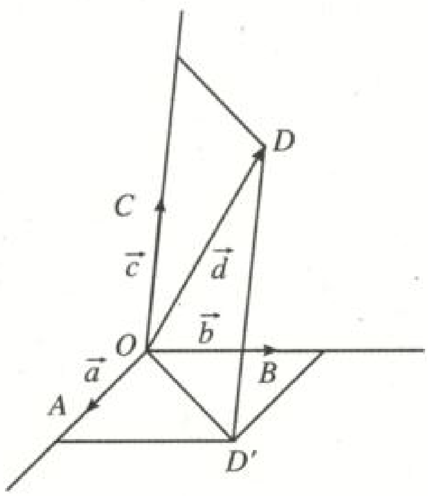
Chứng minh

Từ điểm O, ta đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ thì O, A, B, C không cùng thuộc một mặt phẳng.

Từ điểm D kẻ đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng OC, cắt mặt phẳng (OAB) tại điểm D' (h.91). Khi đó

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{D'D}.$$

Theo định lí 1, ta có các số m, n sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Ngoài ra do $\overrightarrow{D'D}$ và $\vec{c}$ cùng phương nên có số p để $\overrightarrow{D'D} = p\vec{c}$. Vậy $\overrightarrow{OD} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.



Hình 91

Giả sử còn có $\overrightarrow{OD} = m'\vec{a} + n'\vec{b} + p'\vec{c}$ thì

$$(m-m')\vec{a} + (n-n')\vec{b} + (p-p')\vec{c} = \vec{0}.$$

Vì $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng nên $m - m' = n - n' = p - p' = 0$ hay $m = m'$, $n = n'$, $p = p'$. Suy ra các số m, n, p là duy nhất. □

Bài toán 3

Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Xét các điểm M và N lần lượt thuộc các đường thẳng A'C và C'D sao cho $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'} = l\overrightarrow{ND}$ (k và l đều khác 1).

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB'} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{BN}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Xác định các số k, l để đường thẳng MN song song với đường thẳng BD'.

Giải (h.92)

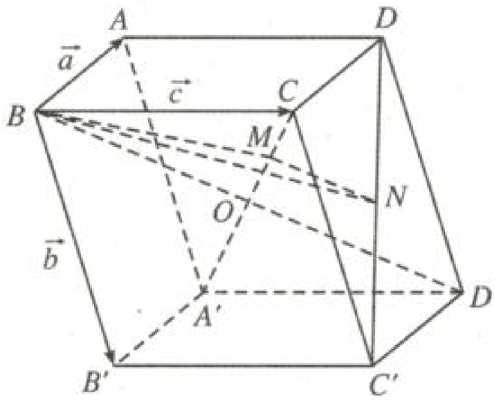
a) Từ giả thiết ta có :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{\overrightarrow{BA'} - k\overrightarrow{BC}}{1-k}, \text{ do đó}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{1-k}\vec{a} + \frac{1}{1-k}\vec{b} - \frac{k}{1-k}\vec{c} \; ;$$

$$\overrightarrow{BN} = \frac{\overrightarrow{BC'} - l\overrightarrow{BD}}{1-l}, \text{ do đó}$$

$$\overrightarrow{BN} = -\frac{l}{1-l}\vec{a} + \frac{1}{1-l}\vec{b} + \vec{c}.$$



Hình 92

b) Vì BD' và $C'D$ là hai đường thẳng chéo nhau và N thuộc đường thẳng $C'D$ nên đường thẳng MN không thể trùng với đường thẳng BD'. Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng BD' khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'}$.

Do $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$ nên ta có

$$\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{l}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-l} - \frac{1}{1-k}\right)\vec{b} + \left(1 + \frac{k}{1-k}\right)\vec{c}.$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (quy tắc hình hộp) mà $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng nên

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{l}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ \dfrac{1}{1-l} - \dfrac{1}{1-k} = p \\ 1 + \dfrac{k}{1-k} = p \end{cases} \Leftrightarrow l = -1,\ k = -3, p = \frac{1}{4}.$$

Vậy khi $k = -3$, $l = -1$ thì đường thẳng MN và đường thẳng BD' song song với nhau. □

Câu hỏi và bài tập

1. Ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có đồng phẳng không nếu một trong hai điều sau đây xảy ra ?

a) Có một vectơ trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

b) Có hai vectơ trong ba vectơ đó cùng phương.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$.

a) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$. Điều ngược lại có đúng không ?

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.

3. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD' ; G và G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.

5. Trong không gian cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng nếu điểm M thuộc mp(ABC) thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O.

b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì điểm M thuộc mp(ABC).

6. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA'$, $SB = bSB'$, $SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.