



## §1. BẤT ĐẲNG THỨC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để so sánh hai số, hai biểu thức  $A$  và  $B$  ta xét dấu của hiệu  $A - B$

$$A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0$$

$$A < B \Leftrightarrow A - B < 0.$$

2. Để chứng minh một bất đẳng thức ta thường sử dụng các tính chất cho trong bảng sau

Điều kiện	Nội dung	Tên gọi
	$a < b$ và $b < c \Rightarrow a < c$	Bắc cầu
	$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$	Cộng hai vế bất đẳng thức với một số
$c > 0$	$a < b \Leftrightarrow ac < bc$	Nhân hai vế bất đẳng thức với một số
$c < 0$	$a < b \Leftrightarrow ac > bc$	
	$a < b$ và $c < d \Rightarrow a + c < b + d$	Cộng hai bất đẳng thức cùng chiều
$a > 0, c > 0$	$a < b$ và $c < d \Rightarrow ac < bd$	Nhân hai bất đẳng thức cùng chiều
$n$ nguyên dương	$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1}$	Nâng hai vế của bất đẳng thức lên một lũy thừa
	$0 < a < b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$	
$a > 0$	$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	Khai căn hai vế của một bất đẳng thức
	$a < b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$	

3. Các bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

$ x  \geq 0,  x  \geq x,  x  \geq -x$	
$ x  \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$	$(a > 0)$
$ x  \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ hoặc } x \geq a$	
$ a  -  b  \leq  a + b  \leq  a  +  b $	

4. Bất đẳng thức Cô-si

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

Đẳng thức  $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$  xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

5. Khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Xét hàm số  $y = f(x)$  với tập xác định  $D$ . Ta định nghĩa

a)  $M$  là giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M. \end{cases}$$

b)  $m$  là giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = f(x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m. \end{cases}$$

## B. BÀI TẬP MẪU

### BÀI 1

Chứng minh rằng  $2xyz \leq x^2 + y^2z^2, \forall x, y, z$ .

**Giải**

Xét hiệu  $x^2 + y^2z^2 - 2xyz = (x - yz)^2 \geq 0$ .

Vậy  $x^2 + y^2z^2 \geq 2xyz$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(x - yz)^2 = 0 \Leftrightarrow x = yz$ .

**Chú ý.** Có thể chứng minh bất đẳng thức đã cho bằng phương pháp *biến đổi tương đương* như sau

$$x^2 + y^2z^2 \geq 2xyz \Leftrightarrow x^2 - 2xyz + y^2z^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - yz)^2 \geq 0 \text{ (đúng).}$$

## BÀI 2

Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1}$ ,  $\forall a \geq 1$ .

### Giải

*Cách 1.* Hai vế bất đẳng thức cần chứng minh đều dương, nên ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 < (\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1})^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a} < (a+1) + (a-1) - 2\sqrt{a^2-1} &\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-1} < 2a - \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow 4(a^2-1) < \left(2a - \frac{1}{a}\right)^2 &\text{ (vì } 2a \geq 2 > \frac{1}{a}, \forall a \geq 1 \Rightarrow 2a - \frac{1}{a} > 0, \forall a \geq 1) \\ \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{a^2} &\text{ (đúng).} \end{aligned}$$

*Cách 2.*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}} < \sqrt{a+1} - \sqrt{a-1} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} < \frac{(\sqrt{a+1})^2 - (\sqrt{a-1})^2}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1} < 2\sqrt{a} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a+1} - \sqrt{a} < \sqrt{a} - \sqrt{a-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{a-1} < \sqrt{a+1} + \sqrt{a} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{a-1} < \sqrt{a+1} \text{ (đúng).} \end{aligned}$$

**BÀI 3**

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$  với  $0 < x < 1$ .

**Giải**

*Cách 1.* Vì  $\frac{1}{x} > 0$  và  $\frac{1}{1-x} > 0, \forall x \in (0; 1)$  nên áp dụng bất đẳng thức Cô-si hai lần ta có

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \geq 2 \cdot \frac{1}{\frac{x+1-x}{2}} = 4.$$

Suy ra  $y \geq 4, \forall x \in (0; 1)$ .

Xây ra đẳng thức  $y = 4$  khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{1-x} \\ x = 1-x \text{ hay } x = \frac{1}{2} \\ x \in (0; 1) \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$  bằng 4 khi  $x = \frac{1}{2}$ .

*Cách 2.* Ta có  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} \geq \frac{1}{\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2} = 4.$

Suy ra  $y \geq 4, \forall x \in (0; 1)$ .

Xây ra đẳng thức  $y = 4$  khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} x = 1-x \\ x \in (0; 1) \end{cases} \text{ hay } x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$  bằng 4 khi  $x = \frac{1}{2}$ .

### C. BÀI TẬP

Trong các bài tập từ 1 đến 10, cho  $a, b, c, d$  là những số dương ;  $x, y, z$  là những số thực tùy ý. Chứng minh rằng

1.  $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3$ .

2.  $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$ .

3.  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

4.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ .

5.  $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$ .

6.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{16}{a+b+c+d}$ .

7.  $a^2b + \frac{1}{b} \geq 2a$ .

8.  $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ .

9.  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}$ .

10.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ .

11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{4}{x} + \frac{9}{1-x} \quad \text{với } 0 < x < 1.$$

12. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 4x^3 - x^4$  với  $0 \leq x \leq 4$ .

13. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số sau trên tập xác định của nó

$$y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}.$$

14. Chứng minh rằng  $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$ ,  $\forall x, y, z$ .