Chương VI. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Quan hệ giữa độ và rađian

$$1^{o} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}, 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{o}.$$

Với $\pi \approx 3,14$ thì $1^{o} \approx 0,0175$ rad và ngược lại, 1 rad $\approx 57^{o}17'45''$.

2. Độ dài l của cung tròn có số đo α rad, bán kính R là $l = R\alpha$.

3. Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A, điểm cuối B là

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

trong đó α là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu A, điểm cuối B. Mỗi giá trị k ứng với một cung.

Nếu viết số đo bằng độ thì ta có

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB} = a^{o} + k360^{o}, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Để biểu diễn cung lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác, ta chọn điểm $A(1 ; 0)$ làm điểm đầu của cung vì vậy chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có sđ $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

5. Mỗi cung lượng giác $\overset{\frown}{CD}$ ứng với một góc lượng giác (OC, OD) và ngược lại. Số đo của cung lượng giác và góc lượng giác tương ứng là trùng nhau.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Đổi số đo của các cung sau ra rađian, với độ chính xác đến 0,0001

a) 20^o ; b) $40^o25'$; c) -27^o ; d) $-53^o30'$.

Hướng dẫn

Có hai cách đổi từ độ ra rađian

Cách 1. Dùng công thức $1^o \approx 0{,}0175$ rad. Chú ý rằng khi đó $30' = 0{,}5^o$; $25' = 0{,}4167^o$.

Cách 2. Dùng máy tính bỏ túi. Ví dụ đổi $40^o25'$ ra rađian. Chẳng hạn, với máy CASIO *fx–500 MS* thì ấn ba lần phím $\boxed{\text{MODE}}$ rồi ấn $\boxed{2}$ để màn hình hiện chữ $\boxed{\mathbf{R}}$.

Sau đó ấn

$$\boxed{4}\ \boxed{0}\ \boxed{^{o},,,}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{^{o},,,}\ \boxed{0}\ \boxed{^{o},,,}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}\blacktriangleright}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$$

cho kết quả 0,7054 (rad).

Đáp số : a) $20^o \approx 0{,}3490$; b) $40^o25' \approx 0{,}7054$;

c) $-27^o \approx -0{,}4712$; d) $-53^o30' \approx -0{,}9337$.

➤ **Chú ý.** Sử dụng hai cách đổi như trên có thể cho hai kết quả khác nhau.

BÀI 2

Đổi số đo của các góc sau ra độ, phút, giây

a) $\dfrac{\pi}{17}$; b) $\dfrac{2}{3}$; c) -5 ; d) $-\dfrac{2\pi}{7}$.

Hướng dẫn

Cũng như bài 1, có hai cách đổi từ rađian ra độ.

Cách 1. Dùng công thức $1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^o$.

Cách 2. Dùng máy tính bỏ túi. Ví dụ đổi $\frac{2}{3}$ rad ra độ. Chẳng hạn, với máy CASIO *fx–500 MS* thì ấn ba lần phím $\boxed{\text{MODE}}$ rồi ấn $\boxed{1}$ để màn hình hiện chữ $\boxed{\mathbf{D}}$. Sau đó ấn liên tiếp

$$\boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{3}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}\blacktriangleright}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{{}^{\text{o}\,\prime\,\prime\,\prime}}$$

Ta được $\frac{2}{3}$ rad $\approx 38^{\circ}11'50''$.

Đáp số : a) $10^{\circ}35'58''$; b) $38^{\circ}11'50''$;

c) $-286^{\circ}28'44''$; d) $-51^{\circ}24'9''$.

BÀI 3

Một đường tròn có bán kính 15 cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo

a) $\frac{\pi}{16}$; b) 25° ; c) 40° ; d) 3.

Lời giải

b) $\alpha = 25^{\circ} = 0{,}4363$ rad.

Độ dài cung 25° trên đường tròn bán kính 15 cm là

$$l = 15.0{,}4363 \approx 6{,}55 \text{ cm}.$$

Các phần còn lại giải tương tự.

Đáp số : a) 2,94 cm ; b) 6,55 cm ;

c) 10,47 cm ; d) 45 cm.

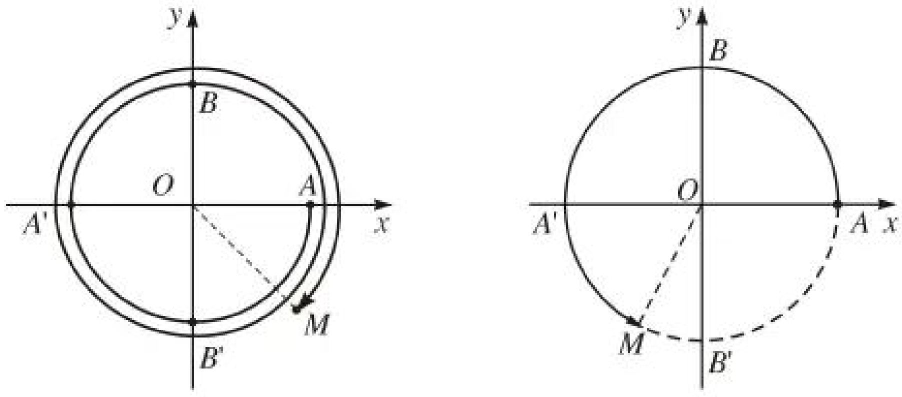
BÀI 4

Trên đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các cung có số đo tương ứng là

a) $-\frac{17}{4}\pi$; b) 240° ; c) $\frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn

Ta lấy điểm đầu của các cung là $A(1\ ;\ 0)$. Do đó biểu diễn các cung này là xác định điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo đã cho.



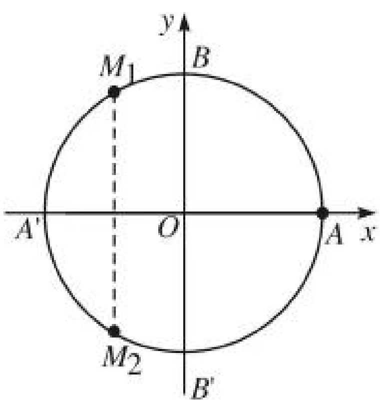
a) b)

Hình 60

Đáp số :

a) sđ $\overset{\frown}{AM} = -\dfrac{17}{4}\pi$ (h.60a)) ; b) sđ $\overset{\frown}{AM} = 240^{\circ}$ (h.60b)).

c) Số đo của cung là $k.\dfrac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$, do đó trước hết ta lấy $k = 0$ được cung có số đo bằng 0, điểm cuối M trùng với điểm A, sau đó lấy $k = 1$ được cung có số đo $\dfrac{2\pi}{3}$, điểm cuối M_1, rồi lấy $k = 2$ được cung có số đo $\dfrac{4\pi}{3}$, điểm cuối M_2. Ba cung này có điểm cuối khác nhau. Khi lấy $k = 3$ ta được cung có số đo $3.\dfrac{2\pi}{3} = 2\pi$ lại có điểm cuối trùng với A, lấy $k = 4$ được điểm cuối trùng với M_1,... (h.61).



Hình 61

BÀI 5

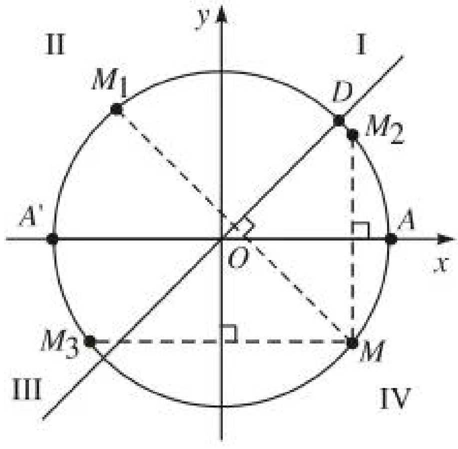
Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\frown}{AM} = -40^{\circ}$. Gọi M_1, M_2, M_3 tương ứng là điểm đối xứng của M qua đường phân giác của góc phần tư thứ I, trục Ox và trục Oy. Tìm số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$.

Hướng dẫn

Trước hết nhận xét rằng đường phân giác của góc phần tư thứ I, trục Ox, trục Oy đều đi qua tâm O của đường tròn lượng giác nên đều là trục đối xứng của đường tròn này. Do đó M_1, M_2, M_3 đều thuộc đường tròn lượng giác.

Nếu gọi giao điểm của đường phân giác của góc phần tư thứ I với đường tròn lượng giác là D thì sđ $\overset{\frown}{MD}$ = sđ $\overset{\frown}{DM_1}$, từ đó suy ra sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_1}$. Tương tự,

sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{AM_2}$ (M_2 đối xứng với M qua trục Ox) và sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{A'M_3}$ ($A'(-1\ ;\ 0)$ và M_3 đối xứng với M qua trục Oy) (h.62).



Hình 62

Giải

a) Ta có $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AD}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{MD} = 40^{\circ} + 45^{\circ} = 85^{\circ}$

$\Rightarrow$ sđ $\overset{\frown}{DM_1} = 85^{\circ}$.

Do đó sđ $\overset{\frown}{AM_1}$ = sđ $\overset{\frown}{AD}$ + sđ $\overset{\frown}{DM_1}$

$= 45^{\circ} + 85^{\circ} = 130^{\circ}$.

Vậy sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_1} = 130^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có $\overset{\frown}{MA} = \overset{\frown}{AM_2}$. Vậy sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_2} = 40^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có sđ $\overset{\frown}{MA}$ = sđ $\overset{\frown}{A'M_3} = 40^{\circ}$ suy ra sđ $\overset{\frown}{AM_3} = 40^{\circ} + 180^{\circ} = 220^{\circ}$.

Vậy sđ $\overset{\curvearrowright}{AM_3} = 220^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

C. BÀI TẬP

1. Đổi số đo của các góc sau ra độ, phút, giây.

a) -4 ;   b) $\dfrac{\pi}{13}$;   c) $\dfrac{4}{7}$.

2. Đổi số đo của các cung sau ra rađian (chính xác đến 0,001).

a) 137° ;   b) $-78^{\circ}35'$;   c) 26°.

3. Một đường tròn có bán kính 25 cm. Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo

a) $\frac{3\pi}{7}$; b) 49^o ; c) $\frac{4}{3}$.

4. Một hình lục giác đều $ABCDEF$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó và ngược chiều quay của kim đồng hồ) nội tiếp trong đường tròn tâm O. Tính số đo bằng rađian của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AE}$, $\overset{\frown}{AF}$.

5. Cho cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ có số đo là 15 rad. Tìm số lớn nhất trong các số đo của cung lượng giác điểm đầu A, điểm cuối B, có số đo âm.

6. Tìm số x $(0 \leq x < 2\pi)$ và số nguyên k sao cho $a = x + k2\pi$ trong các trường hợp

a) $a = 12{,}4\pi$; b) $a = -\frac{9}{5}\pi$; c) $a = \frac{13}{4}\pi$.