Chương III. PHƯƠNG TRÌNH. HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Phương trình ẩn x* là một mệnh đề chứa biến dạng $f(x) = g(x)$, trong đó $f(x)$ và $g(x)$ là các biểu thức của x.

2. *Điều kiện xác định của phương trình* (gọi tắt là điều kiện của phương trình) là những điều kiện của ẩn x để các biểu thức trong phương trình đều có nghĩa.

3. Nếu $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 được gọi là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$.

4. *Giải một phương trình* là tìm tập tất cả các nghiệm của nó.

5. Hai phương trình $f(x) = g(x)$ (1) và $f_1(x) = g_1(x)$ (2) được gọi là *tương đương* nếu chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng).

Kí hiệu (1) $\Leftrightarrow$ (2).

6. Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của nó thì ta được một phương trình mới tương đương.

a) Cộng hay trừ hai vế với cùng một số hay cùng một biểu thức.

b) Nhân hoặc chia hai vế với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.

7. Nếu mỗi nghiệm của phương trình (1) cũng là nghiệm của phương trình (2) thì ta nói phương trình (2) là *phương trình hệ quả* của phương trình (1).

Kí hiệu (1) $\Rightarrow$ (2).

Chẳng hạn, với số nguyên dương n tuỳ ý ta có

$$f(x) = g(x) \Rightarrow [f(x)]^n = [g(x)]^n.$$

8. Phương trình hệ quả có thể có *nghiệm ngoại lai*, không phải là nghiệm của phương trình ban đầu. Muốn loại nghiệm ngoại lai ta phải thử lại vào phương trình ban đầu.

9. Ngoài các phương trình một ẩn còn có các *phương trình nhiều ẩn*. Nghiệm của một phương trình hai ẩn x, y là một cặp số thực $(x_0 ; y_0)$ thoả mãn phương trình đó, còn nghiệm của một phương trình ba ẩn x, y, z là một bộ ba số thực $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ thoả mãn phương trình đó.

10. Trong một phương trình (một hoặc nhiều ẩn), ngoài các chữ đóng vai trò ẩn số còn có thể có các chữ khác được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*.

Giải và biện luận phương trình chứa tham số là xét xem khi nào phương trình đó vô nghiệm, khi nào có nghiệm tuỳ theo các giá trị của tham số và tìm các nghiệm đó.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Tìm điều kiện của các phương trình

a) $\dfrac{2x}{x^2 - 4} = \sqrt{3 - x}$; b) $\dfrac{x + 4}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{1 - x}$.

Giải

a) Biểu thức ở vế trái có nghĩa khi $x \neq 2$ và $x \neq -2$. Biểu thức ở vế phải có nghĩa khi $x \leq 3$.

Điều kiện của phương trình là

$$x \leq 3, x \neq 2 \text{ và } x \neq -2.$$

b) Biểu thức ở vế trái có nghĩa khi $x > 2$, còn vế phải có nghĩa khi $x \leq 1$.

Điều kiện của phương trình là $x \leq 1$ và $x > 2$.

Ta thấy không có giá trị nào của x thoả mãn cả hai điều kiện này.

Chú ý. Khi không có giá trị nào của x thoả mãn điều kiện của phương trình thì phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI 2

Chứng tỏ các phương trình sau vô nghiệm

a) $\dfrac{3x + 1}{\sqrt{-x + 2}} = \sqrt{x - 3}$; b) $\sqrt{x - 4} - x = 3 + \sqrt{4 - x}$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x < 2$ và $x \geq 3$. Không có giá trị nào của x thoả mãn điều kiện này. Vậy phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \geq 4$ và $x \leq 4$, tức là $x = 4$. Giá trị này không thoả mãn phương trình đã cho (vế trái bằng –4, vế phải bằng 3).

Vậy phương trình vô nghiệm.

BÀI 3

Cho phương trình

$$(x+1)^2 = 0 \qquad (1)$$

và phương trình chứa tham số a

$$ax^2 - (2a+1)x + a = 0. \qquad (2)$$

Tìm giá trị của a sao cho phương trình (1) tương đương với phương trình (2).

Giải

Điều kiện cần. Giả sử các phương trình (1) và (2) tương đương. Thế thì, nghiệm $x = -1$ của phương trình (1) cũng phải là nghiệm của phương trình (2). Vậy

$$a.(-1)^2 - (2a+1).(-1) + a = 0 \text{ hay } a = -\frac{1}{4}.$$

Điều kiện đủ. Nếu $a = -\frac{1}{4}$ thì

$$(2) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow (1).$$

Phương trình (1) và (2) tương đương.

Kết luận. Phương trình (1) và (2) tương đương khi và chỉ khi $a = -\frac{1}{4}$.

BÀI 4

Giải các phương trình

a) $\sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1}$; b) $(x-3)^2 = -\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -1$. Ta có

$$\sqrt{x+1} + x = 3 + \sqrt{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}$$
$$\Rightarrow x = 3.$$

Giá trị $x = 3$ thoả mãn điều kiện $x \geq -1$ và nghiệm đúng phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

b) Điều kiện của phương trình là $x > 2$. Với điều kiện đó ta có vế trái không âm, vế phải âm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI 5

Giải các phương trình

a) $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x-3}}$; b) $\dfrac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{x+1}}$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x > 3$.

Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{x-3} = \frac{x+2}{\sqrt{x-3}} \cdot \sqrt{x-3}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = x + 2 \Rightarrow x = 1.$$

Giá trị $x = 1$ không thoả mãn điều kiện $x > 3$ nên bị loại.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x > -1$. Với điều kiện đó, ta có

$$\frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} = \frac{8}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1} = \frac{8}{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Giá trị $x = -2$ không thoả mãn điều kiện của phương trình nên bị loại. Giá trị $x = 2$ thoả mãn điều kiện và nghiệm đúng phương trình.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2$.

C. BÀI TẬP

1. Viết điều kiện của các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+1} = \frac{1}{x}$;

b) $\frac{x+2}{\sqrt{2x^2+1}} = 3x^2 + x + 1$;

c) $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$;

d) $\frac{2x+3}{x^2-4} = \sqrt{x+1}$.

2. Xác định tham số m để các cặp phương trình sau tương đương

a) $x + 2 = 0$ và $\frac{mx}{x+3} + 3m - 1 = 0$;

b) $x^2 - 9 = 0$ và $2x^2 + (m-5)x - 3(m+1) = 0$.

3. Giải các phương trình

a) $\sqrt{x+1} + x = \sqrt{x+1} + 2$;

b) $x - \sqrt{3-x} = \sqrt{x-3} + 3$;

c) $x^2 - \sqrt{2-x} = 3 + \sqrt{x-4}$;

d) $x^2 + \sqrt{-x-1} = 4 + \sqrt{-x-1}$.

4. Giải các phương trình

a) $\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{4}{\sqrt{x-1}}$;

b) $\dfrac{x^2+3x+4}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4}$;

c) $\dfrac{3x^2-x-2}{\sqrt{3x-2}} = \sqrt{3x-2}$;

d) $2x+3+\dfrac{4}{x-1} = \dfrac{x^2+3}{x-1}$.

5. Xác định m để mỗi cặp phương trình sau tương đương

a) $3x-2=0$ và $(m+3)x-m+4=0$;

b) $x+2=0$ và $m(x^2+3x+2)+m^2x+2=0$.