

Chương I. MỆNH ĐỀ. TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.
Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.
2. Với mỗi giá trị của biến thuộc một tập hợp nào đó, mệnh đề chứa biến trở thành một mệnh đề.
3. Phủ định \bar{P} của mệnh đề P là đúng khi P sai và là sai khi P đúng.
4. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai khi P đúng và Q sai (trong mọi trường hợp khác $P \Rightarrow Q$ đều đúng).
5. Mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là $Q \Rightarrow P$.
6. Ta nói hai mệnh đề P và Q là hai mệnh đề tương đương nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.
7. Kí hiệu \forall đọc là với mọi. Kí hiệu \exists đọc là tồn tại ít nhất một (hay có ít nhất một).

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Xét xem trong các câu sau, câu nào là mệnh đề, câu nào là mệnh đề chứa biến ?

a) $7 + x = 3$;

b) $7 + 5 = 3$.

Giải

a) Câu " $7 + x = 3$ " là một mệnh đề chứa biến. Với mỗi giá trị của x thuộc tập số thực ta được một mệnh đề.

b) Câu " $7 + 5 = 3$ " là một mệnh đề. Đó là một mệnh đề sai.

BÀI 2

Với mỗi câu sau, tìm hai giá trị thực của x để được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $3x^2 + 2x - 1 = 0$;

b) $4x + 3 < 2x - 1$.

Giải

a) Với $x = 1$ ta được $3.1^2 + 2.1 - 1 = 0$ là mệnh đề sai ;

Với $x = -1$ ta được $3.(-1)^2 + 2(-1) - 1 = 0$ là mệnh đề đúng.

b) Với $x = -3$ ta được $4.(-3) + 3 < 2.(-3) - 1$ là mệnh đề đúng ;

Với $x = 0$ ta được $4.0 + 3 < 2.0 - 1$ là mệnh đề sai.

BÀI 3

Giả sử ABC là một tam giác đã cho. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó, rồi xét tính đúng sai của chúng với

a) P : "Góc A bằng 90° " , Q : " $BC^2 = AB^2 + AC^2$ " ;

b) P : " $\widehat{A} = \widehat{B}$ " , Q : "Tam giác ABC cân".

Giải

Với tam giác ABC đã cho, ta có

a) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu góc A bằng 90° thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ " là mệnh đề đúng.

$(Q \Rightarrow P)$: "Nếu $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì $\widehat{A} = 90^\circ$ " là mệnh đề đúng.

b) $(P \Rightarrow Q)$: "Nếu $\widehat{A} = \widehat{B}$ thì tam giác ABC cân" là mệnh đề đúng.

$(Q \Rightarrow P)$: "Nếu tam giác ABC cân thì $\widehat{A} = \widehat{B}$ ".

$(Q \Rightarrow P)$ là mệnh đề sai trong trường hợp tam giác ABC có $\widehat{A} = \widehat{C}$ nhưng $\widehat{A} \neq \widehat{B}$.

BÀI 4

Phát biểu thành lời các mệnh đề sau. Xét tính đúng sai và lập mệnh đề phủ định của chúng

a) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$;

b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 \neq 0$.

Giải

a) Có một số thực mà bình phương của nó bằng -1 . Mệnh đề này sai.
Phủ định của nó là "Bình phương của mọi số thực đều khác -1 "

$$(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \neq -1).$$

Mệnh đề này đúng.

b) Với mọi số thực x đều có $x^2 + x + 2 \neq 0$.

Mệnh đề này đúng vì phương trình $x^2 + x + 2 = 0$ vô nghiệm ($\Delta = 1 - 4 \cdot 2 < 0$).

Phủ định của nó là "Có ít nhất một số thực x mà $x^2 + x + 2 = 0$ "

$$(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 2 = 0).$$

Mệnh đề này sai.

C. BÀI TẬP

- Trong các câu sau, câu nào là một mệnh đề, câu nào là một mệnh đề chứa biến?
 - $1 + 1 = 3$;
 - $4 + x < 3$;
 - $\frac{3}{2}$ có phải là một số nguyên không ?
 - $\sqrt{5}$ là một số vô tỉ.
- Xét tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau và phát biểu phủ định của nó
 - $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;
 - $(\sqrt{2} - \sqrt{18})^2 > 8$;
 - $(\sqrt{3} + \sqrt{12})^2$ là một số hữu tỉ ;
 - $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$.
- Tìm hai giá trị thực của x để từ mỗi câu sau ta được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.
 - $x < -x$;
 - $x < \frac{1}{x}$;
 - $x = 7x$;
 - $x^2 \leq 0$.

4. Phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.
- a) P : "15 không chia hết cho 3" ;
- b) Q : " $\sqrt{2} > 1$ ".
5. Lập mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó, với
- a) P : " $2 < 3$ ", Q : " $-4 < -6$ " ;
- b) P : " $4 = 1$ ", Q : " $3 = 0$ ".
6. Cho a là số tự nhiên, xét các mệnh đề P : " a có tận cùng là 0", Q : " a chia hết cho 5".
- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó ;
- b) Xét tính đúng sai của cả hai mệnh đề trên.
7. Với mỗi số thực x , xét các mệnh đề P : " $x^2 = 1$ ", Q : " $x = 1$ ".
- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó ;
- b) Xét tính đúng sai của mệnh đề $Q \Rightarrow P$;
- c) Chỉ ra một giá trị của x mà mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai.
8. Với mỗi số thực x , xét các mệnh đề P : " x là một số hữu tỉ", Q : " x^2 là một số hữu tỉ".
- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và xét tính đúng sai của nó ;
- b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên ;
- c) Chỉ ra một giá trị của x mà mệnh đề đảo sai.
9. Cho tam giác ABC . Xét các mệnh đề P : " $AB = AC$ ", Q : "Tam giác ABC cân".
- a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và mệnh đề đảo của nó ;
- b) Xét tính đúng, sai của cả hai mệnh đề trên.
10. Cho tam giác ABC . Phát biểu mệnh đề đảo của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.
- a) Nếu $AB = BC = CA$ thì ABC là một tam giác đều ;

- b) Nếu $AB > BC$ thì $\widehat{C} > \widehat{A}$;
- c) Nếu $\widehat{A} = 90^\circ$ thì ABC là một tam giác vuông.
- 11.** Sử dụng khái niệm "điều kiện cần", hoặc "điều kiện đủ", hoặc "điều kiện cần và đủ" (nếu có thể) hãy phát biểu các mệnh đề trong bài tập 10.
- 12.** Cho tứ giác $ABCD$. Phát biểu một điều kiện cần và đủ để
- a) $ABCD$ là một hình bình hành ;
- b) $ABCD$ là một hình chữ nhật ;
- c) $ABCD$ là một hình thoi.
- 13.** Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Xét mệnh đề "Nếu $a + b + c = 0$ thì $f(x)$ có một nghiệm bằng 1". Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên. Nêu một điều kiện cần và đủ để $f(x)$ có một nghiệm bằng 1.
- 14.** Dùng kí hiệu \forall hoặc \exists để viết các mệnh đề sau
- a) Có một số nguyên bằng bình phương của nó ;
- b) Mọi số (thực) cộng với 0 đều bằng chính nó ;
- c) Có một số hữu tỉ nhỏ hơn nghịch đảo của nó ;
- d) Mọi số tự nhiên đều lớn hơn 0.
- 15.** Phát biểu thành lời các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.
- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$;
- b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$;
- c) $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$;
- d) $\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$;
- e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$;
- g) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0$.
- 16.** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.
- a) $\forall x \in \mathbb{R} : x.1 = x$;
- b) $\forall x \in \mathbb{R} : x.x = 1$;
- c) $\forall n \in \mathbb{Z} : n < n^2$.
- 17.** Lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xét tính đúng sai của nó.
- a) Mọi hình vuông đều là hình thoi ;
- b) Có một tam giác cân không phải là tam giác đều.