

## §2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Điều kiện* của một bất phương trình là điều kiện mà ẩn số phải thoả mãn để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa.
2. Hai bất phương trình (hệ bất phương trình) được gọi là *tương đương* với nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.
3. Các phép biến đổi bất phương trình

Kí hiệu  $D$  là tập các số thực thoả mãn điều kiện của bất phương trình  $P(x) < Q(x)$ .

a) Phép cộng

Nếu  $f(x)$  xác định trên  $D$  thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x) + f(x) < Q(x) + f(x).$$

b) Phép nhân

Nếu  $f(x) > 0, \forall x \in D$  thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) < Q(x).f(x);$$

Nếu  $f(x) < 0, \forall x \in D$  thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P(x).f(x) > Q(x).f(x).$$

c) Phép bình phương

Nếu  $P(x) \geq 0$  và  $Q(x) \geq 0, \forall x \in D$  thì

$$P(x) < Q(x) \Leftrightarrow P^2(x) < Q^2(x).$$

4. **Chú ý.** Khi biến đổi các biểu thức ở hai vế của một bất phương trình, điều kiện của bất phương trình thường bị thay đổi. Vì vậy, để tìm nghiệm của bất phương trình đã cho ta phải tìm các giá trị của ẩn đồng thời thoả mãn bất phương trình mới và điều kiện của bất phương trình đã cho.

## B. BÀI TẬP MẪU

### BÀI 1

Cho bất phương trình  $\sqrt{\frac{x+1}{(x-2)^2}} < x+1$ .

- Viết điều kiện của bất phương trình đã cho.
- Tìm tất cả các giá trị của  $x$  thoả mãn điều kiện đó.

#### Giải

a) Điều kiện để phép chia thực hiện được :  $(x-2)^2 \neq 0$ .

Điều kiện để phép khai căn thực hiện được :  $\frac{x+1}{(x-2)^2} \geq 0$ . Vậy điều kiện

của bất phương trình đã cho là  $\begin{cases} (x-2)^2 \neq 0 \\ \frac{x+1}{(x-2)^2} \geq 0. \end{cases}$

b) Ta có  $\begin{cases} (x-2)^2 \neq 0 \\ \frac{x+1}{(x-2)^2} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 2) \cup (2; +\infty)$ .

### BÀI 2

Cho hai bất phương trình

$$x^2 \leq x \quad (1) \quad \text{và} \quad x \leq 1 \quad (2).$$

- Chứng tỏ rằng mọi  $x$  âm đều không là nghiệm của (1) nhưng đều là nghiệm của (2).
- Từ đó suy ra rằng hai bất phương trình đã cho không tương đương.

#### Giải

a) Vì  $x^2 \geq 0, \forall x$  do đó mọi  $x$  âm đều không thoả mãn (1). Hơn nữa, các số âm đều nhỏ hơn mọi số dương nên mọi  $x$  âm đều thoả mãn (2). Vì vậy mọi  $x$  âm đều không là nghiệm của (1) nhưng đều là nghiệm của (2).

b) Từ câu a) suy ra tập nghiệm của (1) khác tập nghiệm của (2), do đó (1) và (2) không tương đương.

*Nhận xét* : Chia hai vế của bất phương trình (1) cho  $x$  ta được bất phương trình (2). Như vậy, khi giải bất phương trình không nên chia hai vế của bất phương trình cho một biểu thức (vì có thể làm thay đổi tập nghiệm của bất phương trình cần giải).

### BÀI 3

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của  $x$  thoả mãn điều kiện của bất phương trình

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-5} \geq -10.$$

Từ đó suy ra rằng bất phương trình đã cho vô nghiệm.

#### *Giải*

Điều kiện của bất phương trình đã cho là  $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x \geq 5. \end{cases}$

Không có giá trị nào của  $x$  thoả mãn điều kiện này, vì vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

### BÀI 4

Giải bất phương trình  $\frac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} < 2$ .

#### *Giải*

$$\frac{(x-4)\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-5}} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 > 0 \\ x-4 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 6.$$

## C. BÀI TẬP

15. Viết điều kiện của mỗi bất phương trình sau :

a)  $2x - 3 - \frac{1}{x-5} < x^2 - x$  ;

b)  $x^3 \leq 1$  ;

c)  $\sqrt{x^2 - x - 2} < \frac{1}{2}$  ;

d)  $\sqrt[3]{x^4 + x - 1} + x^2 - 1 \geq 0$ .

16. Chứng tỏ rằng  $x = -7$  không phải là nghiệm của bất phương trình  $x + 3 - \frac{1}{x+7} < 2 - \frac{1}{x+7}$  nhưng lại là nghiệm của bất phương trình  $x + 3 < 2$ .

17. Xét xem  $x = -3$  là nghiệm của bất phương trình nào trong hai bất phương trình sau  $3x + 1 < x + 3$  (1) và  $(3x + 1)^2 < (x + 3)^2$  (2).

Từ đó suy ra rằng phép bình phương hai vế một bất phương trình không phải là phép biến đổi tương đương.

18. Viết điều kiện của mỗi bất phương trình đã cho sau đây rồi cho biết các bất phương trình này có tương đương với nhau hay không :

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} \geq x \quad (1) \quad \text{và} \quad \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-2} \geq x \quad (2).$$

19. Nếu nhân hai vế bất phương trình  $\frac{1}{x} \leq 1$  với  $x$  ta được bất phương trình nào ?

Bất phương trình nhận được có tương đương với bất phương trình đã cho hay không ? Vì sao ?

20. Nếu bình phương hai vế (khử căn thức chứa ẩn) của bất phương trình  $\sqrt{1-x} \leq x$  ta nhận được bất phương trình nào ? Bất phương trình nhận được có tương đương với bất phương trình đã cho hay không ? Vì sao ?

21. Hãy viết điều kiện của bất phương trình sau rồi ruy ra rằng bất phương trình đó vô nghiệm

$$\frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-10}(\sqrt{x}+2)} < \frac{4-x^2}{(x-4)(x+5)}.$$

22. Chứng minh rằng các bất phương trình sau đây vô nghiệm :

a)  $x^2 + \frac{1}{x^2+1} < 1.$

b)  $\sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} < 2.$

c)  $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^4-x^2+1} < 2\sqrt[4]{x^6+1}.$

**23.** Giải các bất phương trình sau :

a)  $(x + 1)(2x - 1) + x \leq 3 + 2x^2$ .

b)  $(x + 1)(x + 2)(x + 3) - x > x^3 + 6x^2 - 5$ .

c)  $x + \sqrt{x} > (2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)$ .

d)  $(\sqrt{1-x} + 3)(2\sqrt{1-x} - 5) > \sqrt{1-x} - 3$ .

**24.** Giải các bất phương trình sau :

a)  $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0$  ;

b)  $\sqrt{(x+2)^2(x-3)} > 0$ .

**25.** Giải các hệ bất phương trình sau :

a) 
$$\begin{cases} -2x + \frac{3}{5} > \frac{2x-7}{3} \\ x - \frac{1}{2} < \frac{5(3x-1)}{2} \end{cases} ;$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{3x+1}{2} - \frac{3-x}{3} \leq \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{3} \\ 3 - \frac{2x+1}{5} > x + \frac{4}{3} \end{cases}$$

**26.** Giải và biện luận bất phương trình theo tham số  $m$

$$mx - m^2 > 2x - 4.$$