

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. KIẾN THỨC CẨN NHÓ

1. Trên đường tròn lượng giác gốc A , cho cung \widehat{AM} có số $\widehat{AM} = \alpha$. Thế thì tung độ của điểm M là $\sin \alpha$, hoành độ của điểm M là $\cos \alpha$,
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$
 (nếu $\cos \alpha \neq 0$), $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ (nếu $\sin \alpha \neq 0$).
2. $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$; $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, với mọi α .
3. $\tan \alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. $\cot \alpha$ không xác định khi và chỉ khi $\alpha = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $\cos \alpha \geq 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và IV.
6. $\sin \alpha \geq 0$ khi và chỉ khi điểm cuối M thuộc góc phần tư thứ I và II.
7. Từ dấu của $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ suy ra dấu của $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$.

➤ **Chú ý.** Các biểu thức có mặt ở hai vế của các đẳng thức trong các mục dưới đây và trong các bài tập sau này đều được quy ước là có nghĩa.

8. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 ; \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} ;$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} ; \quad \tan \alpha \cot \alpha = 1.$$

9. Giá trị lượng giác của các cung đối nhau

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha ; \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha ;$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha ; \quad \cot(-\alpha) = -\cot \alpha.$$

10. Giá trị lượng giác của các cung bù nhau

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha ; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha ;$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha ; \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha.$$

11. Giá trị lượng giác của các cung hơn kém π

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha ; \quad \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha ;$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha ; \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha.$$

12. Giá trị lượng giác của các cung phụ nhau

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha ;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha ; \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;

b) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$;

c) $\tan(\alpha + \pi)$;

d) $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

Hướng dẫn

Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, xác định điểm cuối các cung $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \pi$ và $\alpha - \frac{\pi}{2}$ thuộc cung phần tư nào, từ đó xác định dấu của các giá trị lượng giác tương ứng.

Giải

a) Ta có $-\pi < -\alpha < -\frac{\pi}{2}$, do đó $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \pi$.

Vì vậy $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0$.

b) Từ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\pi < \alpha + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2}$.

Vì vậy $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) < 0$.

c) Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \pi < 2\pi$ nên $\tan(\alpha + \pi) < 0$.

d) Vì $0 < \alpha - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ nên $\cot\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) > 0$.

BÀI 2

Tính các giá trị lượng giác của góc α nếu

a) $\sin\alpha = -\frac{2}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; b) $\cos\alpha = 0,8$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

c) $\tan\alpha = \frac{13}{8}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; d) $\cot\alpha = -\frac{19}{7}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Hướng dẫn

Úng với mỗi khoảng xác định của α đã cho, tìm xem dấu của các giá trị lượng giác của góc α là âm hay dương rồi từ các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản xác định các giá trị lượng giác đó.

Giải

a) Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos \alpha < 0$ mà $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$,
do đó $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Từ đó suy ra $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cot \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

b) Với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ thì $\sin \alpha < 0$, do đó

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - 0,64} = -\sqrt{0,36} = -0,6.$$

Từ đó suy ra $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$, $\cot \alpha = -\frac{4}{3}$.

c) Với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha > 0$. Từ hệ thức $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ suy ra

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{64}{233} \text{ hay } \cos \alpha = \frac{8}{\sqrt{233}}.$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{8}{\sqrt{233}} \cdot \frac{13}{8} = \frac{13}{\sqrt{233}}, \cot \alpha = \frac{8}{13}.$$

d) Với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\sin \alpha > 0$. Từ hệ thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ta được

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{49}{410}.$$

$$\text{Suy ra } \sin \alpha = \frac{7}{\sqrt{410}} ; \cos \alpha = \sin \alpha \cot \alpha = -\frac{19}{\sqrt{410}} ; \tan \alpha = -\frac{7}{19}.$$

BÀI 3

Chứng minh các đẳng thức

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$;

b) $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$;

c) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

Hướng dẫn

Sử dụng các hằng đẳng thức đại số như

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), \dots$$

và các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản để biến đổi một vế thành vế kia.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} \\ &= \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \\ &= 1 - \sin \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha} &= \frac{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Chia cả tử và mẫu cho $\cos \alpha$ ta được $\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha \\ &= \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

BÀI 4 –

Rút gọn các biểu thức

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= (1 + \cot \alpha) \sin^3 \alpha + (1 + \tan \alpha) \cos^3 \alpha; \quad \text{b) } B = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1}{\cot^2 \alpha}; \\ \text{c) } C &= \frac{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha}; \quad \text{d) } D = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Hướng dẫn

Giống như việc chứng minh các đẳng thức lượng giác, việc rút gọn các biểu thức lượng giác cũng sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác và hằng đẳng thức đại số. Khi biến đổi ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để giản ước hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để khử nhau, đi tới những biểu thức gọn hơn.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(1 + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\right) \sin^3 \alpha + \left(1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right) \cos^3 \alpha \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha) \sin^2 \alpha + (\cos \alpha + \sin \alpha) \cos^2 \alpha \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{b) } B = \frac{2\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)}{\cot^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cot^2 \alpha} = \sin^2 \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \frac{\sin^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right)}{\cos^2 \alpha \left(1 - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right)} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}}{\cos^2 \alpha \cdot \frac{(\sin^2 \alpha - 1)}{\sin^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\sin^4 \alpha (-\sin^2 \alpha)}{\cos^4 \alpha (-\cos^2 \alpha)} = \tan^6 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } D &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right)} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}\right)} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

BÀI 5

Cho $\tan \alpha = \frac{3}{5}$, tính giá trị các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}; \quad \text{b) } B = \frac{3 \sin^2 \alpha + 12 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha};$$

$$\text{c) } C = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}.$$

Hướng dẫn

Để tính giá trị các biểu thức này ta phải biến đổi chúng về một biểu thức theo $\tan \alpha$ rồi thay giá trị của $\tan \alpha$ vào biểu thức đã biến đổi.

Giải

a) Vì $\tan \alpha = \frac{3}{5}$ nên $\cos \alpha \neq 0$, chia tử và mẫu của biểu thức cho $\cos \alpha$, ta được

$$A = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} - 1} = -4.$$

b) Vì $\cos \alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\cos^2 \alpha$, ta được

$$B = \frac{3 \tan^2 \alpha + 12 \tan \alpha + 1}{\tan^2 \alpha + \tan \alpha - 2} = \frac{3 \cdot \frac{9}{25} + 12 \cdot \frac{3}{5} + 1}{\frac{9}{25} + \frac{3}{5} - 2} = \frac{232}{-26} = -\frac{116}{13}.$$

c) Vì $\cos \alpha \neq 0$, chia cả tử và mẫu của biểu thức cho $\cos^2 \alpha$, ta được

$$C = \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{25} - 1} = -\frac{15}{16}.$$

C. BÀI TẬP

7. Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xác định dấu của các giá trị lượng giác sau
- $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;
 - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
 - $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
 - $\cot(\alpha + \pi)$.
8. Chứng minh rằng với mọi α , ta luôn có
- $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$;
 - $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$;
 - $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\alpha$;
 - $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\alpha$.
9. Tính các giá trị lượng giác của góc α , nếu
- $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
 - $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
 - $\tan\alpha = \frac{7}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
 - $\cot\alpha = -\frac{14}{9}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
10. Biết $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính
- $A = \frac{2\tan\alpha - 3\cot\alpha}{\cos\alpha + \tan\alpha}$;
 - $B = \frac{\cos^2\alpha + \cot^2\alpha}{\tan\alpha - \cot\alpha}$.
11. Cho $\tan\alpha - 3\cot\alpha = 6$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính
- $\sin\alpha + \cos\alpha$;
 - $\frac{2\sin\alpha - \tan\alpha}{\cos\alpha + \cot\alpha}$.
12. Chứng minh các đẳng thức
- $\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{\cot\beta - \cot\alpha} = \tan\alpha \tan\beta$;
 - $\tan 100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = \frac{1}{\sin 10^\circ}$;
 - $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) + 1 = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)$.

13. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$, hãy tính theo m

$$a) \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha;$$

$$\text{b) } \tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha.$$

14. Không dùng bảng số và máy tính, rút gọn các biểu thức

$$a) A = \tan 18^\circ \tan 288^\circ + \sin 32^\circ \sin 148^\circ - \sin 302^\circ \sin 122^\circ;$$

$$\text{b) } B = \frac{1 + \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}.$$

15. Chứng minh rằng với mọi α làm cho biểu thức $\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + \cot \alpha}$ có nghĩa, biểu thức đó không thể là một số âm.