§2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. *Giải và biện luận phương trình*

$$ax + b = 0. \tag{1}$$

<table>
<tr><th colspan="2">Hệ số</th><th>Kết luận</th></tr>
<tr><td colspan="2">$a \neq 0$</td><td>Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = 0$</td><td>$b \neq 0$</td><td>Phương trình (1) vô nghiệm.</td></tr>
<tr><td>$b = 0$</td><td>Phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x.</td></tr>
</table>

Khi $a \neq 0$ phương trình (1) được gọi là *phương trình bậc nhất* một ẩn.

2. *Giải và biện luận phương trình bậc hai*

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0). \quad (2)$$

Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$	Kết luận
$\Delta > 0$	Phương trình (2) có hai nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
$\Delta = 0$	Phương trình (2) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$.
$\Delta < 0$	Phương trình (2) vô nghiệm.

3. *Định lí Vi-ét*

Nếu phương trình (2) có hai nghiệm x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Ngược lại, nếu hai số u và v có tổng $u + v = S$ và tích $uv = P$ thì u và v là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

4. *Phương trình trùng phương* $ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0)$ có thể đưa về phương trình bậc hai bằng cách đặt $t = x^2, (t \geq 0)$.

5. Có thể khử dấu giá trị tuyệt đối trong *phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối* nhờ sử dụng định nghĩa

$$|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0. \end{cases}$$

Đặc biệt, đối với phương trình $|f(x)| = |g(x)|$, ta có

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

hoặc

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

6. Khi giải *phương trình chứa ẩn dưới dấu căn thức bậc hai* ta thường bình phương hai vế để khử dấu căn thức và đưa tới một phương trình hệ quả.

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $m^2(x+1) - 1 = (2-m)x$;

b) $\dfrac{(2m-1)x+2}{x-2} = m+1.$

Giải

a) $$m^2(x+1) - 1 = (2-m)x$$
$$\Leftrightarrow (m^2 + m - 2)x = 1 - m^2$$
$$\Leftrightarrow (m-1)(m+2)x = -(m-1)(m+1).$$

Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{m+1}{m+2}$.

Nếu $m = 1$ thì mọi số thực x đều là nghiệm của phương trình.

Nếu $m = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \neq 2$. Khi đó ta có

$$\frac{(2m-1)x+2}{x-2} = m+1 \Rightarrow (2m-1)x + 2 = (m+1)(x-2)$$
$$\Rightarrow (m-2)x = -2(m+2). \quad (3)$$

Với $m \neq 2$ phương trình (3) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{-2(m+2)}{m-2}$.

Nghiệm này thoả mãn điều kiện của phương trình đã cho khi và chỉ khi

$$\frac{-2(m+2)}{m-2} \neq 2$$

hay $$-2m - 4 \neq 2m - 4 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Với $m = 2$ phương trình (3) trở thành $0.x = -8$, phương trình này vô nghiệm, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Kết luận. Khi $m = 2$ hoặc $m = 0$ phương trình vô nghiệm.

Khi $m \neq 2$ và $m \neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{-2(m+2)}{m-2}$.

BÀI 2

Cho phương trình bậc hai

$$x^2 + (2m - 3)x + m^2 - 2m = 0.$$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt ;

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm và tích của chúng bằng 8 ? Tìm các nghiệm trong trường hợp đó.

Giải

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi biệt thức $\Delta > 0$. Ta có

$$\Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 2m) = - 4m + 9.$$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow - 4m + 9 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{4}.$$

Vậy khi $m < \frac{9}{4}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Phương trình có hai nghiệm khi $m \leq \frac{9}{4}$. Theo định lí Vi-ét ta có

$$m^2 - 2m = 8 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 4. \end{array}\right.$$

Với $m = 4 > \frac{9}{4}$ phương trình vô nghiệm.

Với $m = -2$ phương trình trở thành $x^2 - 7x + 8 = 0$ và có hai nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Vậy với $m = -2$ phương trình đã cho có hai nghiệm và tích của chúng bằng 8.

Hai nghiệm đó là $x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{17}}{2}$.

BÀI 3

Cho phương trình $mx^2 + (m^2 - 3)x + m = 0$.

a) Xác định m để phương trình có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1 + x_2 = \dfrac{13}{4}$?

Giải

a) Phương trình có nghiệm kép khi $m \neq 0$ và $\Delta = 0$. Ta có

$$\Delta = (m^2 - 3)^2 - 4m^2 = m^4 - 10m^2 + 9.$$

Phương trình trùng phương $m^4 - 10m^2 + 9 = 0$ có bốn nghiệm $m = \pm 1$ và $m = \pm 3$.

Với $m = 1$ hoặc $m = -3$ phương trình đã cho có nghiệm kép $x = 1$.

Với $m = -1$ hoặc $m = 3$ phương trình đã cho có nghiệm kép $x = -1$.

b) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là

$$m \neq 0 \text{ và } \Delta = m^4 - 10m^2 + 9 \geq 0.$$

Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3 - m^2}{m}.$$

Theo đề bài ta phải có $\dfrac{3 - m^2}{m} = \dfrac{13}{4}$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 13m - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = \dfrac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Với $m = -4$ thì $\Delta = 105$;

Với $m = \dfrac{3}{4}$ thì $\Delta = \dfrac{945}{256}$.

Cả hai giá trị tìm được của m đều thoả mãn điều kiện $\Delta \geq 0$.

Vậy khi $m = -4$ hoặc $m = \dfrac{3}{4}$ thì tổng hai nghiệm của phương trình là $\dfrac{13}{4}$.

BÀI 4

Giải các phương trình sau bằng cách bình phương hai vế :

a) $\sqrt{4x - 9} = 2x - 5$; b) $\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 3x - 1$.

Hướng dẫn : Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được một phương trình hệ quả. Vì vậy, khi tìm ra các giá trị của ẩn số, ta phải thử lại xem giá trị đó có thoả mãn phương trình đã cho hay không.

Giải

a) Điều kiện của phương trình là $x \geq \frac{9}{4}$. Ta có

$$\sqrt{4x-9} = 2x-5 \Rightarrow 4x-9 = (2x-5)^2$$
$$\Rightarrow 4x-9 = 4x^2-20x+25$$
$$\Rightarrow 2(2x^2-12x+17) = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$.

Giá trị $x_2 = \frac{6-\sqrt{2}}{2}$ không thoả mãn điều kiện của phương trình nên bị loại.

Giá trị x_1 thoả mãn điều kiện của phương trình. Thay $x_1 = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$ vào phương trình ban đầu ta thấy giá trị của hai vế bằng nhau.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{6+\sqrt{2}}{2}$.

b) Điều kiện của phương trình là $x^2-7x+10 \geq 0$.

Ta có

$$\sqrt{x^2-7x+10} = 3x-1 \Rightarrow x^2-7x+10 = (3x-1)^2$$
$$\Rightarrow x^2-7x+10 = 9x^2-6x+1$$
$$\Rightarrow 8x^2+x-9 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{9}{8}$.

Cả hai giá trị 1 và $-\frac{9}{8}$ đều thoả mãn điều kiện của phương trình đã cho. Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $x = 1$ thoả mãn phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 1$.

BÀI 5

Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ :

a) $\sqrt{4x^2 - 4x - 11} = 8x^2 - 8x - 28$;

b) $\sqrt{3x^2 + 9x - 8} = x^2 + 3x - 2$.

Hướng dẫn : Đối với những phương trình dạng này việc bình phương hai vế sẽ dẫn tới phương trình bậc 4 mà cách giải rất phức tạp. Tuy nhiên, ở đây ta nhận thấy tam thức bậc hai dưới dấu căn thức và tam thức ở vế phải có hệ số bậc hai và hệ số bậc nhất tỉ lệ với nhau, nên để giải phương trình ta đặt ẩn số phụ, bằng cách đặt biểu thức căn bậc hai bằng y, với điều kiện $y \geq 0$, rồi đưa về việc giải phương trình bậc hai theo y.

Giải

a) Đặt $y = \sqrt{4x^2 - 4x - 11}$, điều kiện $y \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$$y = 2y^2 - 6 \Leftrightarrow 2y^2 - y - 6 = 0.$$

Phương trình cuối cùng có hai nghiệm $y_1 = 2$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Giá trị $y_2 = -\frac{3}{2}$ không thoả mãn điều kiện nên bị loại. Với $y = 2$ ta có phương trình

$$4x^2 - 4x - 11 = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0.$$

Giải phương trình cuối ta được hai nghiệm $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{5}{4}$ và $x = -\frac{3}{2}$.

Chú ý. Khi giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ trên đây, ta chỉ cần kiểm tra điều kiện $y \geq 0$, chứ không cần đặt điều kiện của phương trình và kiểm tra điều kiện của phương trình.

b) Đặt $y = \sqrt{3x^2 + 9x - 8}$, điều kiện $y \geq 0$.

Phương trình đã cho trở thành

$$y = \frac{1}{3}(y^2 + 8) - 2 \Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

Cả hai giá trị y_1, y_2 đều thoả mãn điều kiện.

• Với $y_1 = 1$ ta có phương trình

$$3x^2 + 9x - 8 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 9x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 3 = 0.$$

Giải phương trình này ta được hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

• Với $y_2 = 2$ ta có phương trình

$$3x^2 + 9x - 8 = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_3 = 1$, $x_4 = -4$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 như trên.

BÀI 6

Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m

a) $|4x - 3m| = 2x + m$; b) $|3x - m| = |2x + m + 1|$;

c) $\dfrac{(m+3)x + 2(3m+1)}{x+1} = (2m-1)x + 2.$

Giải

a) Ta xét hai trường hợp

Với $x \geq \dfrac{3m}{4}$ phương trình đã cho trở thành

$$4x - 3m = 2x + m \Leftrightarrow 2x = 4m \Leftrightarrow x = 2m.$$

Ta có $2m \geq \dfrac{3m}{4} \Leftrightarrow m \geq 0.$

Vậy với $m \geq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = 2m$.

Với $x < \frac{3m}{4}$ phương trình đã cho trở thành

$$-4x + 3m = 2x + m \Leftrightarrow 6x = 2m \Leftrightarrow x = \frac{m}{3}.$$

Ta có $\frac{m}{3} < \frac{3m}{4} \Leftrightarrow \frac{3m}{4} - \frac{m}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{5m}{12} > 0 \Leftrightarrow m > 0.$

Vậy với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = \frac{m}{3}.$

Kết luận. Với $m > 0$ phương trình có nghiệm $x = 2m$ và $x = \frac{m}{3}.$

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm $x = 0$.

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

b) Ta có

$$|3x - m| = |2x + m + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3x - m = 2x + m + 1 & (1) \\ 3x - m = -2x - m - 1. & (2) \end{array}\right.$$

Ta thấy

$$(1) \Leftrightarrow x = 2m + 1,$$

$$(2) \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}.$$

Hai nghiệm này trùng nhau khi $2m + 1 = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow 2m = -\frac{6}{5} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{5}.$

Kết luận. Với $m \neq -\frac{3}{5}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = 2m + 1 \text{ và } x = -\frac{1}{5}.$$

Với $m = -\frac{3}{5}$ phương trình có nghiệm kép $x = -\frac{1}{5}.$

Ghi chú. Vì hai vế của phương trình là những biểu thức không âm nên ta cũng có thể bình phương hai vế để được một phương trình tương đương.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq -1$. Khi đó ta có

$$\frac{(m+3)x + 2(3m+1)}{x+1} = (2m-1)x + 2$$

$$\Leftrightarrow (m+3)x + 2(3m+1) = [(2m-1)x + 2](x+1)$$

$$\Leftrightarrow (m+3)x + 2(3m+1) = (2m-1)x^2 + (2m+1)x + 2$$

$$\Leftrightarrow (2m-1)x^2 + (m-2)x - 6m = 0. \qquad (*)$$

Với $m = \frac{1}{2}$ phương trình (*) trở thành

$$-\frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Giá trị $x = -2$ thoả mãn điều kiện của phương trình đã cho.

Với $m \neq \frac{1}{2}$ phương trình (*) là một phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta = (m-2)^2 + 24m(2m-1)$$

$$= 49m^2 - 28m + 4$$

$$= (7m-2)^2 \geq 0.$$

Khi $m \neq \frac{2}{7}$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{2 - m \pm (7m-2)}{2(2m-1)}.$$

Ta đặt $x_1 = \frac{3m}{2m-1}$, $x_2 = -2$.

Giá trị $\frac{3m}{2m-1} \neq -1$ khi và chỉ khi $3m \neq -2m + 1$ hay $m \neq \frac{1}{5}$.

Khi $m = \frac{2}{7}$ phương trình (*) có nghiệm kép $x = -2$.

Kết luận

Khi $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = \frac{1}{5}$ phương trình có một nghiệm $x = -2$.

Khi $m = \frac{2}{7}$ phương trình có nghiệm kép $x = -2$.

Khi $m \neq \frac{1}{2}$, $m \neq \frac{1}{5}$ và $m \neq \frac{2}{7}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{3m}{2m - 1} \text{ và } x_2 = -2.$$

C. BÀI TẬP

6. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình sau

a) $m(m - 6)x + m = -8x + m^2 - 2$;

b) $\dfrac{(m - 2)x + 3}{x + 1} = 2m - 1$;

c) $\dfrac{(2m + 1)x - m}{x - 1} = x + m$;

d) $\dfrac{(3m - 2)x - 5}{x - m} = -3$.

7. Cho phương trình

$$(m + 2)x^2 + (2m + 1)x + 2 = 0.$$

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm trái dấu và tổng hai nghiệm bằng -3.

b) Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm kép ? Tìm nghiệm kép đó.

8. Cho phương trình

$$9x^2 + 2(m^2 - 1)x + 1 = 0.$$

a) Chứng tỏ rằng với $m > 2$ phương trình có hai nghiệm phân biệt âm.

b) Xác định m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 mà $x_1 + x_2 = -4$.

9. Cho phương trình bậc hai với tham số m

$$3x^2 - 2(m+1)x + 3m - 5 = 0.$$

Xác định m để phương trình có một nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia. Tính các nghiệm trong trường hợp đó.

10. Giải các phương trình

a) $\sqrt{3x-4} = x - 3$;

b) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2x - 1$;

c) $\sqrt{2x^2 + 3x + 7} = x + 2$;

d) $\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x+5}$.

11. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình sau

a) $|3x + 2m| = x - m$;

b) $|2x + m| = |x - 2m + 2|$;

c) $mx^2 + (2m-1)x + m - 2 = 0$;

d) $\dfrac{\sqrt{4x-2}}{2x-1} = m - 1.$