

### §3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Công thức cộng

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b ;$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ;$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b ;$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b ;$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} ;$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} .$$

##### 2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a ;$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a ;$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} .$$

3. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}; \quad \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}.$$

4. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)];$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)];$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)].$$

5. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2};$$

$$\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2};$$

$$\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u + v}{2} \cos \frac{u - v}{2};$$

$$\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u + v}{2} \sin \frac{u - v}{2}.$$

## B. BÀI TẬP MẪU

### BÀI 1

Chứng minh rằng

a)  $\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{4} \cos 3x;$

b)  $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) = \sin x.$

**Giải**

a) Ta có

$$\begin{aligned} \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) &= \frac{1}{2} \cos x \left(\cos 2x + \cos \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) &= \sin 5x - 2 \sin x \cos 4x - 2 \sin x \cos 2x \\ &= \sin 5x - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 3x - \sin x) = \sin x. \end{aligned}$$

**BÀI 2**

Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng và tổng thành tích để tính

a)  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ$  ;

b)  $\cos 14^\circ + \cos 134^\circ + \cos 106^\circ$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ &= \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \cos 20^\circ \\ &= \frac{1 - 4 \sin 10^\circ \cos 20^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\sin 30^\circ - \sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos 14^\circ + \cos 134^\circ + \cos 106^\circ &= \cos 14^\circ + 2 \cos 120^\circ \cos 14^\circ \\ &= \cos 14^\circ - \cos 14^\circ = 0. \end{aligned}$$

**BÀI 3**

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cos A \cos B \cos C.$$

**Hướng dẫn**

Đối với các góc trong tam giác ABC ta có :

$$A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C, \quad \frac{A + B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$$

Từ đó suy ra  $\cos(A + B) = -\cos C$ ,  $\sin(A + B) = \sin C$

$$\cos\left(\frac{A + B}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}, \quad \tan\left(\frac{A + B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}.$$

### Giải

Biến đổi vế trái trong đề bài :

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1 + \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2} + \cos^2 C \\ &= 1 + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) + \cos^2 C \\ &= 1 + \cos(A + B).\cos(A - B) + \cos^2 C \\ &= 1 - \cos C.\cos(A - B) + \cos^2 C \\ &= 1 - [\cos(A - B) - \cos C].\cos C \\ &= 1 - [\cos(A - B) + \cos(A + B)].\cos C \\ &= 1 - 2\cos A.\cos B.\cos C. \end{aligned}$$

### C. BÀI TẬP

16. Cho  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ , tính  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$ .

17. Cho  $\sin \alpha = \frac{8}{17}$ ,  $\sin \beta = \frac{15}{17}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . Chứng minh rằng

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

18. Không dùng bảng số và máy tính, chứng minh rằng

a)  $\sin 20^\circ + 2\sin 40^\circ - \sin 100^\circ = \sin 40^\circ$  ;

b)  $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \tan \alpha$  ;

$$c) \frac{3 \cot^2 15^\circ - 1}{3 - \cot^2 15^\circ} = -\cot 15^\circ ;$$

$$d) \sin 200^\circ \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

19. Chứng minh rằng các biểu thức sau là những hằng số không phụ thuộc  $\alpha, \beta$

$$a) \sin 6\alpha \cot 3\alpha - \cos 6\alpha ;$$

$$b) [\tan(90^\circ - \alpha) - \cot(90^\circ + \alpha)]^2 - [\cot(180^\circ + \alpha) + \cot(270^\circ + \alpha)]^2 ;$$

$$c) (\tan \alpha - \tan \beta) \cot(\alpha - \beta) - \tan \alpha \tan \beta ;$$

$$d) \left( \cot \frac{\alpha}{3} - \tan \frac{\alpha}{3} \right) \tan \frac{2\alpha}{3}.$$

20. Không sử dụng bảng số và máy tính, hãy tính

$$a) \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} ;$$

$$b) \cot 7,5^\circ + \tan 67,5^\circ - \tan 7,5^\circ - \cot 67,5^\circ.$$

21. Rút gọn các biểu thức

$$a) \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} ;$$

$$b) \frac{4 \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} ;$$

$$c) \frac{1 + \cos \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha - \sin \alpha} ;$$

$$d) \frac{1 + \sin \alpha - 2 \sin^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{4 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

22. Cho hình thang cân  $ABCD$  có đáy nhỏ  $AB = AD$ . Biết  $\tan \widehat{BDC} = \frac{3}{4}$ , tính các giá trị lượng giác của  $\widehat{BAD}$ .