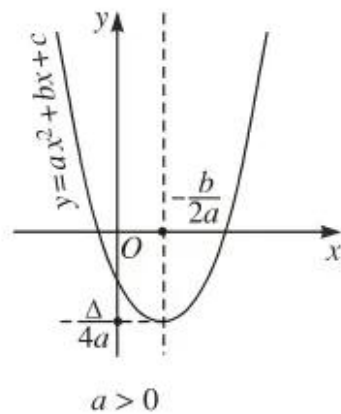


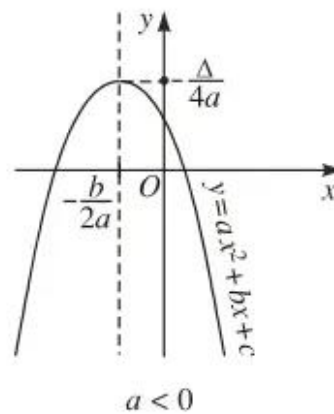
§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
2. Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.
Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$ (h. 15), xuống dưới nếu $a < 0$ (h. 16).



Hình 15



Hình 16

3. Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) ta thực hiện các bước sau :
Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$;

Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

Xác định giao điểm của parabol với các trục toạ độ (nếu có). Xác định thêm một số điểm thuộc đồ thị. Chẳng hạn, điểm đối xứng với giao điểm của đồ thị với trục tung qua trục đối xứng của parabol.

Dựa vào kết quả trên, vẽ parabol.

4. Bảng biến thiên

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\frac{-\Delta}{4a}$	$-\infty$

B. BÀI TẬP MẪU

BÀI 1

Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

a) $y = -x^2 + 2x - 2$;

b) $y = 2x^2 + 6x + 3$.

Giải

a) Hàm số đã cho là hàm số bậc hai với $a = -1$; $b = 2$ và $c = -2$.

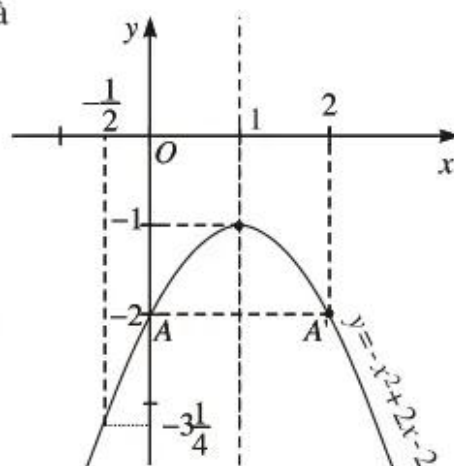
Ta có $-\frac{b}{2a} = 1$; $\Delta = b^2 - 4ac = -4$; $-\frac{\Delta}{4a} = -1$.

Vì $a < 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1 ; +\infty)$.

Parabol $y = -x^2 + 2x - 2$ có đỉnh là $I(1 ; -1)$, trục đối xứng là đường thẳng $d : x = 1$; giao điểm của đồ thị với trục tung là điểm $A(0 ; -2)$. Điểm đối xứng với A qua d là $A'(2 ; -2)$ thuộc đồ thị. Đồ thị của hàm số được vẽ trên hình 17.



Hình 17

b) Đối với hàm số đã cho ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$; $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{3}{2}$.

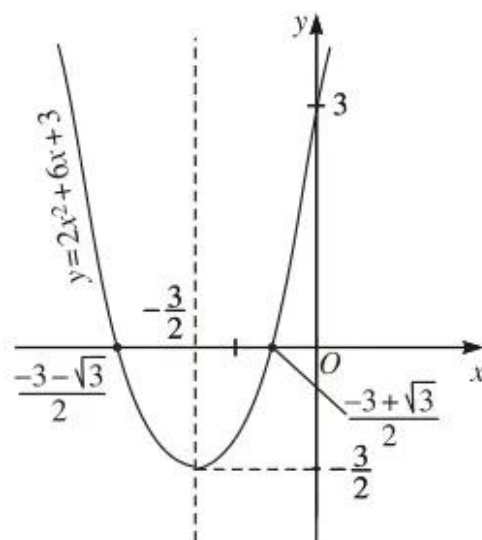
Vì $a > 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

Parabol $y = 2x^2 + 6x + 3$ có trục đối xứng là đường thẳng $d : x = -\frac{3}{2}$; đỉnh

$I\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; giao điểm với trục tung $(0 ; 3)$ và các giao điểm với trục hoành là $\left(\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}; 0\right)$ và $\left(\frac{-3 + \sqrt{3}}{2}; 0\right)$. Đồ thị

của hàm số được vẽ trên hình 18.



Hình 18

BÀI 2

Xác định hàm số bậc hai $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng đồ thị của nó

- a) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và cắt trục tung tại điểm $(0 ; 4)$;
- b) Có đỉnh là $I(-1 ; -2)$;
- c) Đi qua hai điểm $A(0 ; -1)$ và $B(4 ; 0)$;
- d) Có hoành độ đỉnh là 2 và đi qua điểm $M(1 ; -2)$.

Giải

Để xác định hàm số ta phải xác định các hệ số b và c từ các điều kiện đã cho.

a) Ta có $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a = -4$; $4 = 2.0 + b.0 + c \Leftrightarrow c = 4$.

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - 4x + 4$.

b) Ta có $-\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow b = 2a = 4$; $-\frac{\Delta}{4a} = -2$

do đó $\frac{4ac - b^2}{4a} = -2$. (1)

Thay $a = 2$ và $b = 4$ vào (1) ta được $\frac{8c - 16}{8} = -2 \Leftrightarrow c = 0$.

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 + 4x$.

c) Vì parabol đi qua $A(0 ; -1)$ và $B(4 ; 0)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -1 = 2.0 + b.0 + c \\ 0 = 2.16 + 4.b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ 32 + 4.b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = -\frac{31}{4} \end{cases}$$

Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - \frac{31}{4}x - 1$.

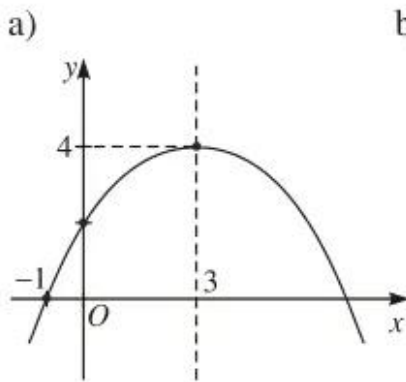
d) Ta có $-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -8$; parabol đi qua điểm $M(1, -2)$ nên

$-2 = 2.1 + b.1 + c \Leftrightarrow -2 = 2 - 8 + c \Rightarrow c = 4$.

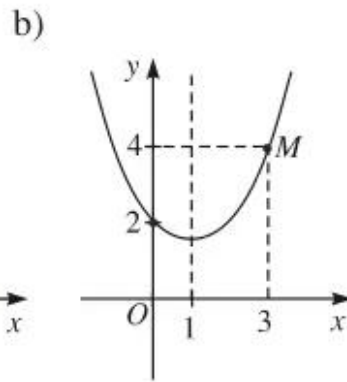
Hàm số cần tìm là $y = 2x^2 - 8x + 4$.

BÀI 3

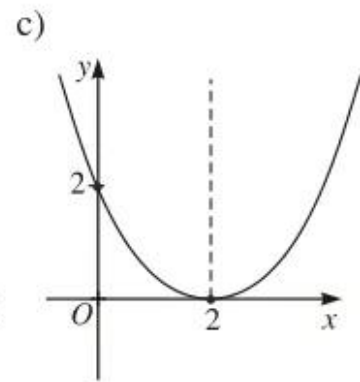
Viết phương trình của parabol $y = ax^2 + bx + c$ ứng với mỗi hình sau



Hình 19



Hình 20



Hình 21

Giải

a) Trên hình 19, ta thấy điểm $I(3; 4)$ là đỉnh của parabol và điểm $(-1; 0)$ thuộc đồ thị. Ta có

$$-\frac{b}{2a} = 3 \quad (1); \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = 4 \quad (2) \quad \text{và} \quad 0 = a - b + c \quad (3).$$

Từ (1) suy ra $b = -6a$. Thay biểu thức của b vào (2) ta được

$$\frac{4ac - 36a^2}{4a} = 4 \Leftrightarrow c - 9a = 4 \quad (\text{vì } a \neq 0).$$

Thay $b = -6a$ và $c = 4 + 9a$ vào (3) ta được

$$a + 6a + 4 + 9a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}.$$

Từ đó $b = -6a = \frac{3}{2}$ và $c = 4 + 9a = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$.

Vậy $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

b) Trên hình 20, ta thấy đồ thị cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; 2)$ nên suy ra $c = 2$. Vì trục đối xứng của đồ thị là đường thẳng $x = 1$ nên

$-\frac{b}{2a} = 1$, ngoài ra vì đồ thị đi qua điểm $M(3; 4)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 2 \\ b = -2a \\ 4 = 9a + 3b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2a \\ 4 = 9a - 6a + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = -2a \\ 3a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = -\frac{4}{3} \\ c = 2. \end{cases}$$

Vậy $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 2$.

c) Theo hình 21, parabol có đỉnh $I(2 ; 0)$ và đi qua điểm $(0 ; 2)$.

Vậy $c = 2 ; -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a ;$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow 16a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ (vì } a \neq 0) \text{ và } b = -4a = -2.$$

Từ đó $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$.

C. BÀI TẬP

14. Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh, các giao điểm với trục tung và trục hoành của parabol

a) $y = 2x^2 - x - 2 ;$

b) $y = -2x^2 - x + 2 ;$

c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 ;$

d) $y = \frac{1}{5}x^2 - 2x + 6.$

15. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số bậc hai

a) $y = 2x^2 + 4x - 6 ;$

b) $y = -3x^2 - 6x + 4 ;$

c) $y = \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 ;$

d) $y = -2(x^2 + 1).$

16. Xác định hàm số bậc hai $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng đồ thị của nó

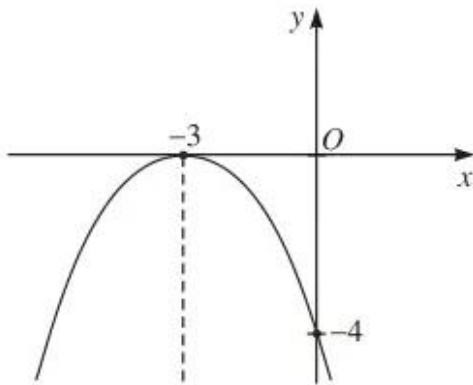
a) Đi qua hai điểm $A(1 ; -2)$ và $B(2 ; 3) ;$

b) Có đỉnh là $I(-2 ; -1) ;$

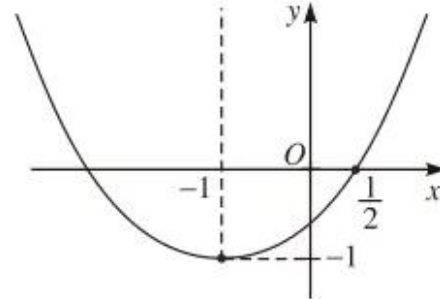
c) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $P(-2 ; 1) ;$

d) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $M(3 ; 0).$

17. Viết phương trình của parabol $y = ax^2 + bx + c$ ứng với mỗi đồ thị dưới đây.



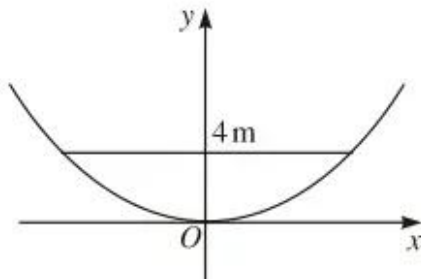
Hình 22



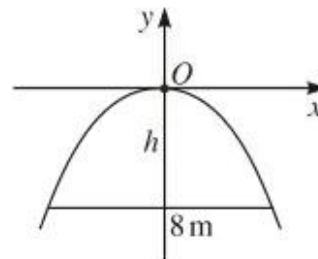
Hình 23

18. Một chiếc ãng-ten chảo parabol có chiều cao $h = 0,5$ m và đường kính $d = 4$ m. Ở mặt cắt qua trục ta được một parabol dạng $y = ax^2$ (h.24). Hãy xác định hệ số a .

19. Một chiếc cổng hình parabol dạng $y = -\frac{1}{2}x^2$ có chiều rộng $d = 8$ m. Hãy tính chiều cao h của cổng (h.25).



Hình 24



Hình 25