

## §5. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Đồ thị hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ ) và dấu của  $f(x)$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

## 2. Một số điều kiện tương đương

Nếu  $ax^2 + bx + c$  là một tam thức bậc hai ( $a \neq 0$ ) thì

1)  $ax^2 + bx + c = 0$  có nghiệm khi và chỉ khi  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  ;

2)  $ax^2 + bx + c = 0$  có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi  $\frac{c}{a} < 0$  ;

3)  $ax^2 + bx + c = 0$  có các nghiệm dương khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0; \end{cases}$$

4)  $ax^2 + bx + c = 0$  có các nghiệm âm khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} < 0; \end{cases}$$

5)  $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0; \end{cases}$

6)  $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0; \end{cases}$

7)  $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0; \end{cases}$

8)  $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

## B. BÀI TẬP MẪU

### BÀI 1

Giải bất phương trình $\frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 9x + 14} \geq 0.$ <span style="float: right;">(1)</span>
--

**Giải**

Tam thức  $x^2 - 9x + 14$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1 = 2, x_2 = 7.$

Tam thức  $x^2 + 9x + 14$  có hai nghiệm phân biệt  $x_3 = -7, x_4 = -2$ .

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình (1)

	$-\infty$	$-7$	$-2$	$2$	$7$	$+\infty$			
$x^2 - 9x + 14$	+			+	0	+			
$x^2 + 9x + 14$	+	0	-	0	+	+			
Vế trái của (1)	+		-		+	0	-	0	+

Từ bảng trên suy ra nghiệm bất phương trình đã cho là

$$(-\infty; -7) \cup (-2; 2] \cup [7; +\infty).$$

## BÀI 2

Xét phương trình  $mx^2 - 2(m-1)x + 4m - 1 = 0$ . Tìm các giá trị của tham số  $m$  để phương trình có

- Hai nghiệm phân biệt ;
- Hai nghiệm trái dấu ;
- Các nghiệm dương ;
- Các nghiệm âm.

### Giải

$$\begin{aligned} \text{Xét} \quad \Delta' &= (m-1)^2 - m(4m-1) \\ &= -3m^2 - m + 1 \quad (\text{nếu } m \neq 0). \end{aligned}$$

a) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $m \neq 0$  và  $\Delta' > 0$

$$\text{hay} \quad \begin{cases} 3m^2 + m - 1 < 0 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{tức là} \quad \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} < m < 0 \quad \text{hoặc} \quad 0 < m < \frac{-1 + \sqrt{13}}{6}.$$

b) Phương trình có các nghiệm trái dấu khi và chỉ khi  $\frac{4m-1}{m} < 0$

hay  $m(4m-1) < 0$  tức là  $0 < m < \frac{1}{4}$ .

c) Phương trình có các nghiệm dương khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$$

hay 
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ \frac{4m-1}{m} > 0 \\ \frac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases}$$
 tức là 
$$\begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > \frac{1}{4} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 1. \end{cases}$$

Vậy  $\frac{-1-\sqrt{13}}{6} \leq m < 0$ .

d) Giải tương tự c), ta được kết quả  $\frac{1}{4} < m \leq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ .

### BÀI 3

Tìm các giá trị của  $m$  để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi  $x$

$$mx^2 - 4(m-1)x + m - 5 \leq 0.$$

#### Giải

a) Nếu  $m = 0$  thì bất phương trình trở thành  $4x - 5 \leq 0$ , bất phương trình chỉ nghiệm đúng với  $x \leq \frac{5}{4}$ .

b) Nếu  $m \neq 0$  thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$  khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' = 4(m-1)^2 - m(m-5) \leq 0 \\ m < 0 \end{cases}$$

$$\text{hay } \begin{cases} 3m^2 - 3m + 4 \leq 0 \\ m < 0. \end{cases} \quad (*)$$

Không có giá trị nào của  $m$  thoả mãn (\*).

*Kết luận.* Không có giá trị nào của  $m$  để bất phương trình nghiệm đúng với mọi  $x$ .

### C. BÀI TẬP

40. Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a)  $2x^2 + 5x + 2$  ;

b)  $4x^2 - 3x - 1$  ;

c)  $-3x^2 + 5x + 1$  ;

d)  $3x^2 + x + 5$ .

*Giải các bất phương trình sau*

41. a)  $x^2 - 2x + 3 > 0$  ;

b)  $x^2 + 9 > 6x$ .

42. a)  $6x^2 - x - 2 \geq 0$  ;

b)  $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$ .

43. a)  $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x - 10} < 0$  ;

b)  $\frac{10 - x}{5 + x^2} > \frac{1}{2}$ .

44. a)  $\frac{x + 1}{x - 1} + 2 > \frac{x - 1}{x}$  ;

b)  $\frac{1}{x + 1} + \frac{2}{x + 3} < \frac{3}{x + 2}$ .

45. a)  $\begin{cases} x^2 \geq 0,25 \\ x^2 - x \leq 0 \end{cases}$  ;

b)  $\begin{cases} (x - 1)(2x + 3) > 0 \\ (x - 4)\left(x + \frac{1}{4}\right) \leq 0. \end{cases}$

46. a)  $\begin{cases} x^2 \geq 4x \\ (2x - 1)^2 < 9 \end{cases}$  ;

b)  $\begin{cases} 2x - 3 < (x + 1)(x - 2) \\ x^2 - x \leq 6. \end{cases}$

*Giải các bất phương trình, hệ bất phương trình (ẩn  $m$ ) sau*

47. a)  $2m^2 - m - 5 > 0$  ;

b)  $-m^2 + m + 9 > 0$ .

48. a)  $(2m - 1)^2 - 4(m + 1)(m - 2) \geq 0$  ;

b)  $m^2 - (2m - 1)(m + 1) < 0$ .

$$49. \text{ a) } \begin{cases} (2m-1)^2 - 4(m^2 - m) \geq 0 \\ \frac{1}{m^2 - m} > 0 \\ \frac{2m-1}{m^2 - m} > 0 \end{cases} ; \quad \text{ b) } \begin{cases} (m-2)^2 - (m+3)(m-1) \geq 0 \\ \frac{m-2}{m+3} < 0 \\ \frac{m-1}{m+3} > 0. \end{cases}$$

$$50. \text{ a) } \begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ m^2 - (m-2)(2m-1) < 0 \end{cases} ; \quad \text{ b) } \begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) \leq 0. \end{cases}$$

51. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các tam thức bậc hai sau có dấu không đổi (không phụ thuộc vào  $x$ )

a)  $f(x) = 2x^2 - (m+2)x + m^2 - m - 1$  ;

b)  $f(x) = (m^2 - m - 1)x^2 - (2m-1)x + 1$ .

52. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm phân biệt trái dấu

a)  $(m^2 - 1)x^2 + (m+3)x + (m^2 + m) = 0$  ;

b)  $x^2 - (m^3 + m - 2)x + m^2 + m - 5 = 0$ .

53. Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt

a)  $x^2 - 2x + m^2 + m + 3 = 0$  ;

b)  $(m^2 + m + 3)x^2 + (4m^2 + m + 2)x + m = 0$ .

54. Với giá trị nào của tham số  $m$  hệ phương trình có nghiệm thoả mãn điều kiện  $x > 0, y < 0$  ?

$$\begin{cases} 2x - (m^2 + m + 1)y = -m^2 - 9 \\ m^4x + (2m^2 + 1)y = 1. \end{cases}$$

*Tìm các giá trị của tham số  $m$  để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi  $x$  (các bài tập 55, 56)*

55. a)  $5x^2 - x + m > 0$  ;

b)  $mx^2 - 10x - 5 < 0$ .

56. a)  $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1$  ;                      b)  $m(m + 2)x^2 + 2mx + 2 > 0$ .

57. Tìm  $m$  để các bất phương trình sau vô nghiệm

a)  $5x^2 - x + m \leq 0$  ;                      b)  $mx^2 - 10x - 5 \geq 0$ .

58. Tìm  $m$  để các phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt

a)  $(m^2 + m + 1)x^2 + (2m - 3)x + m - 5 = 0$  ;

b)  $x^2 - 6mx + 2 - 2m + 9m^2 = 0$ .