LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Tập xác định của cả ba hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = h(x)$ là

$$D = \{1998 ; 1999 ; 2000 ; 2001 ; 2002\}.$$

b) $f(2002) = 620\,000$ (con) ; $g(1999) = 380\,000$ (con) ; $h(2000) = 100\,000$ (con). Năm 2002 sản lượng của trang trại là 620 000 con vịt ; năm 1999 sản lượng là 380 000 con gà ; năm 2000 trang trại có sản lượng là 100 000 con ngan lai.

c) $h(2002) - h(1999) = 210\,000 - 30\,000 = 180\,000$ (con). Sản lượng ngan lai của trang trại năm 2002 tăng 180 000 con so với năm 1999.

2. a) $D = \mathbb{R}$; b) $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$;

c) Hàm số xác định với các giá trị của x thoả mãn

$$4x + 1 \geq 0 \text{ và } -2x + 1 \geq 0 \text{ hay } x \geq -\frac{1}{4} \text{ và } x \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left[-\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$.

d) Hàm số xác định với các giá trị của x thoả mãn

$$\begin{cases} x+9 \geq 0 \\ x^2+8x-20 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -9 \\ x \neq -10 \text{ và } x \neq 2. \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D = [-9\ ;+\infty) \setminus \{2\}$.

e) $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\ ;3\right\}$.

h) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt{6}\ ;-1+\sqrt{6}\}$ vì $x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{6} \\ x=-1+\sqrt{6}. \end{array}\right.$

3. $f(5) = -5^2+2.5 = -25+10 = -15$ (vì $5>0$) ;

$f(-2) = \dfrac{2.(-2)-3}{-2-1} = \dfrac{7}{3}$ (vì $-2<0$) ; $f(0)=3$; $f(2)=0$.

4. $f(-2)-f(1) = (-2)^2+2+\sqrt{2+2}-(1^2+2+\sqrt{2-1}) = 8-4 = 4$;

$g(3) = -2.3^3-3.3+5 = -58$;

$f(-7)-g(-7) = (-7)^2+2+\sqrt{2+7}-[-2.(-7)^3-3.(-7)+5] = -658$;

$f(-1)-u(-1) = 3+\sqrt{3}-2 = 1+\sqrt{3}$;

$u(3)-v(3) = \sqrt{9-4}-(9+1) = \sqrt{5}-10$; $v(0)-g(0) = \sqrt{6}-5$;

$\dfrac{f(2)-f(-2)}{v(2)-v(-3)} = \dfrac{6-8}{5-3} = -1.$

5. a) $\forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$; ta có

$$f(x_1)-f(x_2) = -2x_1+3-(-2x_2+3) = -2(x_1-x_2).$$

Ta thấy nếu $x_1 > x_2$ thì $-2(x_1-x_2)<0$, tức là

$$f(x_1)-f(x_2)<0 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $\forall\, x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$; ta có

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= x_1^2+10x_1+9-x_2^2-10x_2-9 \\ &= (x_1-x_2)(x_1+x_2)+10(x_1-x_2) \\ &= (x_1-x_2)(x_1+x_2+10). \qquad (*) \end{aligned}$$

$\forall x_1, x_2 \in (-5 ; +\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 + 10 > 0$ vì $x_1 > -5$; $x_2 > -5 \Rightarrow x_1 + x_2 > -10$.

Vậy từ (*) suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-5 ; +\infty)$.

c) $\forall x_1, x_2 \in (-3 ; -2)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$; $x_1 + 1 < -2 + 1 < 0$; $x_2 + 1 < -2 + 1 < 0 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$. Vậy

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} < 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-3 ; -2)$.

$\forall x_1, x_2 \in (2 ; 3)$ và $x_1 < x_2$, tương tự ta cũng có $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2 ; 3)$.

6. a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$ và $\forall x \in D$ có $-x \in D$ và $f(-x) = -2 = f(x)$.

Hàm số là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$; $\forall x \in D$ có $-x \in D$ và $f(-x) = 3(-x)^2 - 1 =$

$= 3x^2 - 1 = f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}$, nhưng $f(1) = -1 + 3 - 2 = 0$ còn $f(-1) = -1 - 3 - 2 = -6$

nên $f(-1) \neq f(1)$ và $f(-1) \neq -f(1)$.

Vậy hàm số đã cho không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

d) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên nếu $x \neq 0$ và $x \in D$ thì $-x \in D$. Ngoài ra,

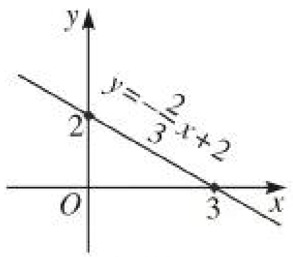
$$f(-x) = \frac{-(-x)^4 + (-x)^2 + 1}{-x} = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{-x} = -\frac{-x^4 + x^2 + 1}{x} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

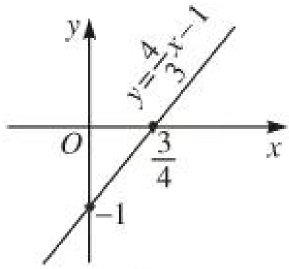
7. a) Đồ thị là hình 26. Hàm số không là hàm số chẵn, không là hàm số lẻ.

b) Đồ thị là hình 27. Hàm số không là hàm số chẵn, không là hàm số lẻ.

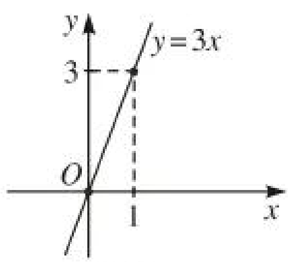
c) Đồ thị là hình 28. Hàm số là hàm số lẻ.



Hình 26



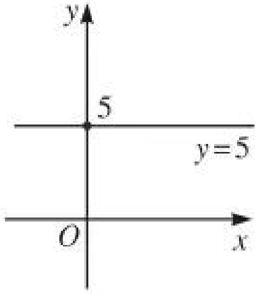
Hình 27



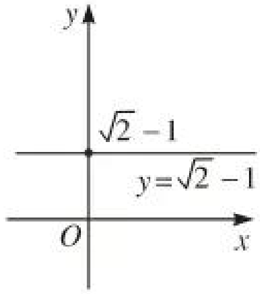
Hình 28

d) Đồ thị là hình 29. Hàm số là hàm số chẵn.

e) Đồ thị là hình 30. Hàm số là hàm số chẵn.

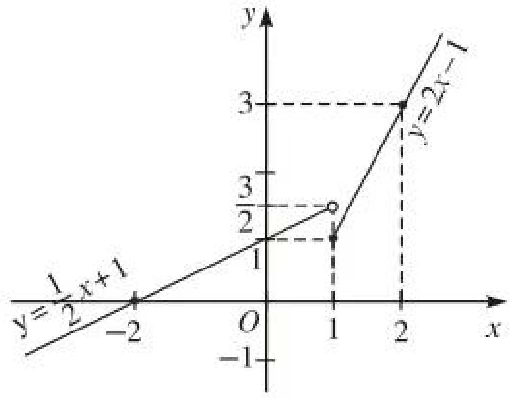


Hình 29



Hình 30

8.



Hình 31

Đồ thị hàm số được vẽ trên hình 31. Điểm (1 ; 1) thuộc đồ thị, điểm $\left(1\ ;\ \frac{3}{2}\right)$ không thuộc đồ thị.

9. *Hướng dẫn.* Các đường thẳng đều có phương trình dạng $y = ax + b$. Các đường thẳng song song với nhau đều có cùng một hệ số a. Do đó các phương trình của các đường thẳng song song với đường thẳng $y = 3x - 2$ đều có hệ số $a = 3$.

a) Phương trình cần tìm có dạng $y = 3x + b$. Vì đường thẳng đi qua điểm $M(2\ ;\ 3)$, nên ta có $3 = 3.2 + b \Leftrightarrow b = -3$.

Vậy phương trình của đường thẳng đó là $y = 3x - 3$.

b) $y = 3x + 5$.

10. *Hướng dẫn.* Để xác định các hệ số a và b ta dựa vào toạ độ các điểm mà đồ thị đi qua, lập hệ phương trình có hai ẩn a và b.

a) Vì đồ thị đi qua $A\left(\frac{2}{3}\ ;\ -2\right)$ nên ta có phương trình $a.\frac{2}{3} + b = -2$.

Tương tự, dựa vào toạ độ của $B(0\ ;\ 1)$ ta có $0 + b = 1$.

Vậy, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2a}{3} + b = -2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{9}{2} \\ b = 1. \end{cases}$$

b) $a = 0$; $b = -2$;

c) $a = \dfrac{1}{3}$; $b = \dfrac{2}{3}$.

11. a) Ta thấy đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm (0 ; 3) và (1 ; 0). Vậy, ta có

$$\begin{cases} 3 = b \\ 0 = a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 3. \end{cases}$$

Đường thẳng có phương trình là $y = -3x + 3$.

b) $y = -4x$; c) $y = x - 2$.

12. *Hướng dẫn.* Để xét xem một điểm với toạ độ cho trước có thuộc đồ thị của hàm số $y = f(x)$ hay không ta chỉ cần tính giá trị của hàm số tại hoành độ của điểm đã cho. Nếu giá trị của hàm số tại đó bằng tung độ của điểm đang xét thì điểm đó thuộc đồ thị, còn nếu ngược lại thì điểm đang xét không thuộc đồ thị.

a) Với điểm $A(-1 ; 3)$. Ta có

$|-(-1) - 3| + |2.(-1) + 1| + |-1 + 1| = 2 + 1 + 0 = 3$, bằng tung độ của điểm A, do đó điểm A thuộc đồ thị.

b) Điểm B không thuộc đồ thị ;

c) Điểm C không thuộc đồ thị ;

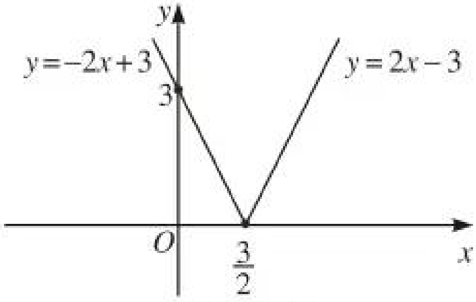
d) Điểm D không thuộc đồ thị.

13. a) Ta có thể viết

$$y = \begin{cases} 2x - 3 & \text{với } x \geq \dfrac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{với } x < \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

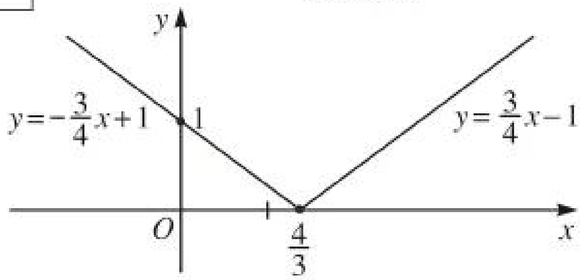
Từ đó có bảng biến thiên và đồ thị của hàm số $y = |2x - 3|$ (h.32)

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



Hình 32

b) Bảng biến thiên và đồ thị của hàm số $y = \left|-\frac{3}{4}x + 1\right|$ (h.33)

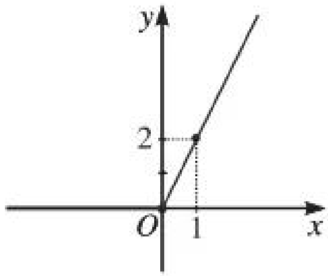


Hình 33

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

c) Ta có thể viết $y = \begin{cases} 0 & \text{với } x < 0 \\ 2x & \text{với } x \geq 0 \end{cases}$

và đồ thị của hàm số $y = x + |x|$ được vẽ trên hình 34.



Hình 34

14. a) Ở đây $a = 2$; $b = -1$; $c = -2$. Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4.2.(-2) = 17$.

Trục đối xứng là đường thẳng $x = \frac{1}{4}$; đỉnh $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{17}{8}\right)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; -2)$.

Để tìm giao điểm với trục hoành ta giải phương trình

$$2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Vậy các giao điểm với trục hoành là $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ và $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$.

b) Trục đối xứng $x = -\frac{1}{4}$; đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{17}{8}\right)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; 2)$; giao với trục hoành tại các điểm $\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$ và $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}; 0\right)$.

c) Trục đối xứng $x = 2$; đỉnh $I(2 ; 1)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; -1)$; giao với trục hoành tại các điểm $(2 + \sqrt{2} ; 0)$ và $(2 - \sqrt{2} ; 0)$.

d) Trục đối xứng $x = 5$; đỉnh $I(5 ; 1)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; 6)$. Parabol không cắt trục hoành $\left(\Delta = -\frac{4}{5} < 0\right)$.

15. a) Hàm số bậc hai đã cho có $a = 2$; $b = 4$; $c = -6$;

Vậy $-\frac{b}{2a} = -1$; $\Delta = b^2 - 4ac = 64$; $-\frac{\Delta}{4a} = -8$.

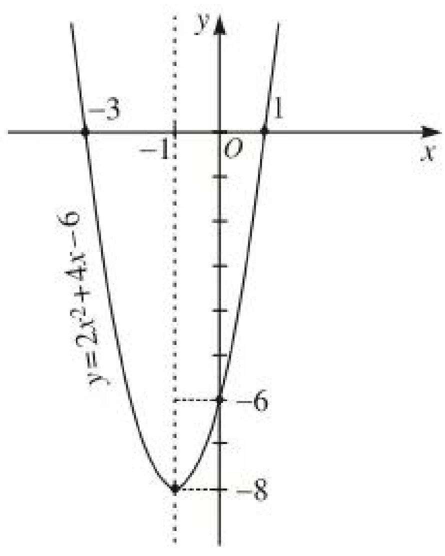
Vì $a > 0$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-8	$\nearrow$	$+\infty$

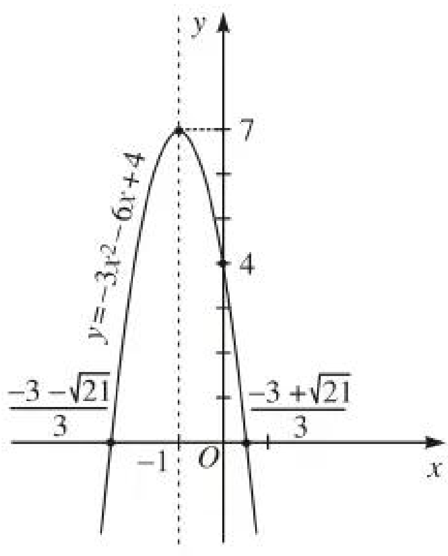
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty ; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1 ; +\infty)$.

Để vẽ đồ thị ta có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$; đỉnh $I(-1 ; -8)$; giao với trục tung tại điểm $(0 ; -6)$; giao với trục hoành tại các điểm $(-3 ; 0)$ và $(1 ; 0)$.

Đồ thị của hàm số $y = 2x^2 + 4x - 6$ được vẽ trên hình 35



Hình 35



Hình 36

b) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1\ ;\ +\infty)$.

Đỉnh parabol $I(-1\ ;\ 7)$. Đồ thị của hàm số $y = -3x^2 - 6x + 4$ được vẽ trên hình 36.

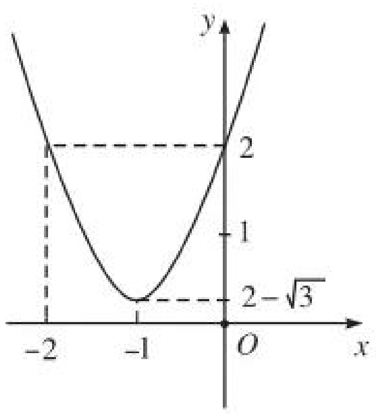
c) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$2-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

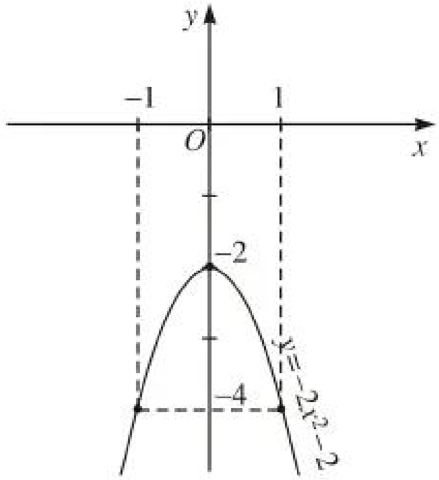
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1\ ;\ +\infty)$.

Đỉnh parabol $I(-1\ ;\ 2-\sqrt{3})$.

Đồ thị hàm số được vẽ trên hình 37.



Hình 37



Hình 38

d) $y = -2x^2 - 2$. Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$ $\nearrow$	-2	$\searrow$ $-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty ; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0 ; +\infty)$, hàm số là chẵn.

Đỉnh parabol $I(0 ; -2)$; đồ thị đi qua điểm $(1 ; -4)$ và điểm $(-1 ; -4)$.

Đồ thị hàm số $y = -2(x^2 + 1)$ được vẽ trên hình 38.

16. Các hàm số bậc hai cần xác định đều có $b = -4$.

a) Ta có $\begin{cases} -2 = a - 4 + c \\ 3 = 4a - 8 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 4a + c = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ c = -1. \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = 3x^2 - 4x - 1$.

b) $y = -x^2 - 4x - 5$; c) $y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x - \frac{13}{3}$; d) $y = x^2 - 4x + 3$.

17. a) Dựa trên đồ thị (h.22) ta thấy parabol có đỉnh $I(-3 ; 0)$ và đi qua điểm $(0 ; -4)$. Như vậy $c = -4$; $-\frac{b}{2a} = -3 \Leftrightarrow b = 6a$. Thay $c = -4$ và $b = 6a$ vào biểu thức $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 36a^2 + 16a = 0 \Rightarrow a = -\frac{4}{9}$ (vì $a \neq 0$) và $b = -\frac{8}{3}$.

Vậy phương trình của parabol là $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x - 4$.

b) $y = \frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{5}{9}$.

18. Hệ số $a = \frac{1}{8}$.

19. Chiều cao của cổng $h = 8$ m.

20. Không.

21. Hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a ; b)$.

22. a) Xét phương trình $2x^2 + 3x - 2 = 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$

Vậy parabol đã cho và đường thẳng $y = 2x + 1$ có hai giao điểm là $(1\ ;\ 3)$ và $\left(-\dfrac{3}{2}; -2\right)$.

b) Xét phương trình $2x^2 + 3x - 2 = x - 4$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0. \qquad (*)$$

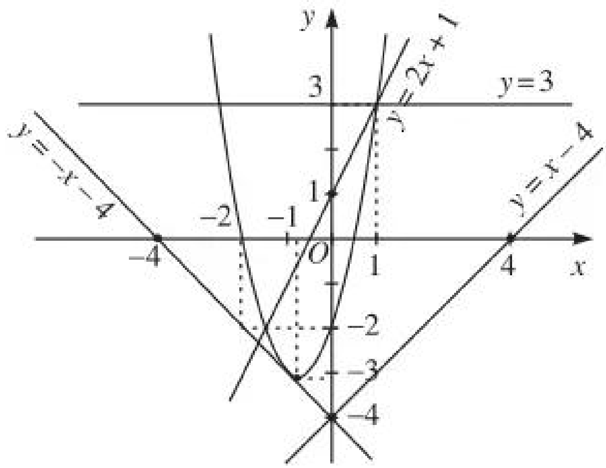
Phương trình (*) có biệt thức $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy parabol đã cho và đường thẳng $y = x - 4$ không có giao điểm.

c) Xét phương trình

$2x^2 + 3x - 2 = -x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. Vậy parabol đã cho và đường thẳng $y = -x - 4$ tiếp xúc nhau tại điểm có toạ độ $(-1\ ;\ -3)$.



Hình 39

Đồ thị được vẽ trên hình 39.

d) Xét phương trình $2x^2 + 3x - 2 = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Vậy có hai giao điểm là $(1\ ;\ 3)$ và $\left(-\dfrac{5}{2}\ ;\ 3\right)$

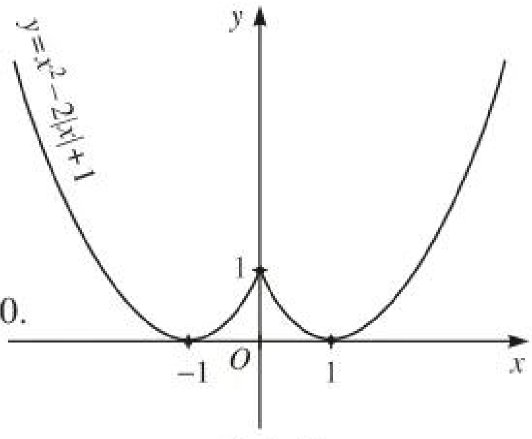
23. Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Ngoài ra

$f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = f(x)$. Hàm số là hàm số chẵn. Đồ thị của nó nhận trục tung làm trục đối xứng. Để xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị của nó chỉ cần xét chiều biến thiên và vẽ đồ thị của nó trên nửa khoảng $[0\ ;\ +\infty)$, rồi lấy đối xứng qua Oy. Với $x \geq 0$, có $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

Bảng biến thiên

x	0 1 $+\infty$
$f(x)$	$1 \searrow 0 \nearrow +\infty$

Đồ thị của hàm số đã cho được vẽ ở hình 40.

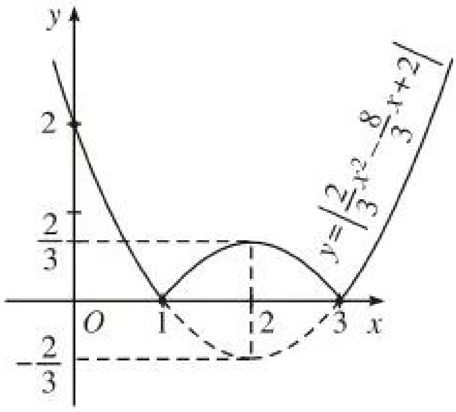


Hình 40

24. Vì $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

nên để vẽ đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ ta vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, sau đó giữ nguyên phần đồ thị ở phía trên trục hoành và lấy đối xứng phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.

Trong trường hợp này, ta vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$, sau đó giữ nguyên phần đồ thị ứng với các nửa khoảng $(-\infty\ ;1]$ và $[3\ ;\ +\infty)$. Lấy đối xứng phần đồ thị ứng với khoảng $(1\ ;\ 3)$ qua trục hoành.

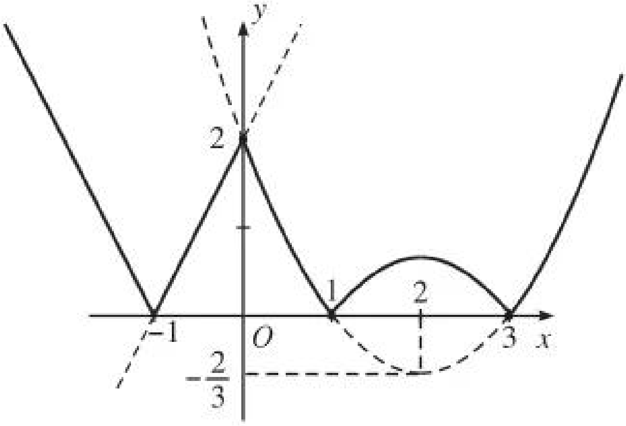


Hình 41

Đồ thị của hàm số $y = \left|\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2\right|$ được vẽ trên hình 41 (đường nét liền).

25. Với $x > 0$ ta có đồ thị của $y = |f(x)|$ như hình 41 (bỏ phần ứng với $x \leq 0$).

Với $x \leq 0$, trước hết vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 2$. Giữ yên phần đồ thị ứng với đoạn $[-1\ ;\ 0]$, bỏ đi phần đồ thị ứng với khoảng $(-\infty\ ;\ -1)$, thay vào đó là phần đối xứng với phần bỏ đi qua trục hoành. Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ được vẽ trên hình 42 (đường nét liền).



Hình 42