LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -\frac{1}{2}$ và $x \neq 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Biểu thức vế trái có nghĩa khi $x > 1$ và biểu thức vế phải có nghĩa khi $x > -3$. Từ đó suy ra điều kiện của phương trình là $x > 1$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \geq -1$, $x \neq 2$ và $x \neq -2$. Vì $x > -1$ thì $x \neq -2$ suy ra điều kiện của phương trình là $x \geq -1$ và $x \neq 2$.

2. a) Phương trình $x + 2 = 0$ có nghiệm $x = -2$.

Phương trình $\frac{mx}{x+3} + 3m - 1 = 0$ có nghiệm $x = -2$ khi $-2m + 3m - 1 = 0$ suy ra $m = 1$.

Với $m = 1$, phương trình trở thành $\frac{x}{x+3} + 2 = 0$ và có nghiệm duy nhất $x = -2$.

Vậy hai phương trình tương đương khi $m = 1$.

b) Phương trình $x^2 - 9 = 0$ có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -3$.

Giá trị $x = 3$ là nghiệm của phương trình

$$2x^2 + (m-5)x - 3(m+1) = 0 \qquad (1)$$

khi $18 + 3(m-5) - 3(m+1) = 0$.

Đẳng thức trên thoả mãn với mọi m.

Giá trị $x = -3$ là nghiệm của phương trình (1) khi

$$18 - 3(m-5) - 3(m+1) = 0.$$

$$\Leftrightarrow 30 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 5.$$

Khi $m = 5$ phương trình (1) trở thành

$$2x^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 3$ và $x = -3$.

Vậy với $m = 5$ hai phương trình đã cho tương đương.

3. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -1$. Ta có

$$\sqrt{x+1} + x = \sqrt{x+1} + 2 \Rightarrow x = 2.$$

Giá trị $x = 2$ thoả mãn điều kiện của phương trình.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

b) Điều kiện của phương trình là $x \leq 3$ và $x \geq 3$ hay $x = 3$.

Giá trị $x = 3$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 3$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \leq 2$ và $x \geq 4$. Không có số thực nào thoả mãn đồng thời hai điều kiện này.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện của phương trình là $x \leq -1$. Ta có

$$x^2 + \sqrt{-x-1} = 4 + \sqrt{-x-1} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2.$$

Chỉ có giá trị $x_2 = -2$ thoả mãn điều kiện $x \leq -1$ và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.

4. a) Điều kiện của phương trình là $x > 1$. Ta có

$$\frac{3x^2+1}{\sqrt{x-1}} = \frac{4}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow 3x^2 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Cả hai giá trị $x = 1$, $x = -1$ đều không thoả mãn điều kiện $x > 1$.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x > -4$. Ta có

$$\frac{x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x + 4}} = \sqrt{x + 4} \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

Cả hai giá trị $x_1 = 0$ và $x_2 = -2$ đều thoả mãn điều kiện $x > -4$ và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = -2$.

c) Điều kiện của phương trình là $x > \frac{2}{3}$. Ta có

$$\frac{3x^2 - x - 2}{\sqrt{3x - 2}} = \sqrt{3x - 2} \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 3x - 2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Chỉ có giá trị $x = \frac{4}{3}$ thoả mãn điều kiện $x > \frac{2}{3}$ và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{4}{3}$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 1$. Ta có

$$2x + 3 + \frac{4}{x - 1} = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$$

$$\Rightarrow (2x + 3)(x - 1) + 4 = x^2 + 3$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Giá trị $x = 1$ bị loại do vi phạm điều kiện $x \neq 1$ và giá trị $x = -2$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -2$.

5. a) Phương trình $3x - 2 = 0$ có nghiệm $x = \frac{2}{3}$, thay $x = \frac{2}{3}$ vào phương trình

$(m + 3)x - m + 4 = 0$, ta có

$$(m + 3)\frac{2}{3} - m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}m + 6 = 0 \Leftrightarrow m = 18.$$

Với $m = 18$ phương trình $(m + 3)x - m + 4 = 0$ trở thành $21x = 14$ hay $x = \frac{2}{3}$.

Vậy hai phương trình tương đương khi $m = 18$.

b) Phương trình $x + 2 = 0$ có nghiệm $x = -2$. Thay $x = -2$ vào phương trình

$m(x^2 + 3x + 2) + m^2x + 2 = 0$, ta có

$$-2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Khi $m = 1$ phương trình thứ hai trở thành

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

Khi $m = -1$ phương trình thứ hai trở thành

$$-x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow -x(x + 2) = 0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $x = 0$, $x = -2$.

Vậy hai phương trình đã cho tương đương khi $m = 1$.

6. a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(m^2 - 6m + 8)x = m^2 - m - 2$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(m - 4)x = (m + 1)(m - 2).$$

Kết luận

Với $m \neq 2$ và $m \neq 4$, phương trình có nghiệm $x = \frac{m+1}{m-4}$;

Với $m = 2$, mọi số thực x đều là nghiệm của phương trình ;

Với $m = 4$, phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \neq -1$. Ta có

$$\frac{(m-2)x+3}{x+1} = 2m - 1$$

$$\Rightarrow (m-2)x + 3 = (2m-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow (m+1)x = 4 - 2m. \qquad (1)$$

Với $m = -1$ phương trình (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho cũng vô nghiệm.

Với $m \neq -1$ phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{4-2m}{m+1}$.

Nghiệm này thoả mãn điều kiện $x \neq -1$ khi và chỉ khi $\frac{4-2m}{m+1} \neq -1$ hay $-2m + 4 \neq -m - 1 \Rightarrow m \neq 5$.

Kết luận

Với $m = -1$ hoặc $m = 5$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \neq -1$ và $m \neq 5$ phương trình có nghiệm là $x = \frac{4-2m}{m+1}$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq 1$. Khi đó ta có

$$\frac{(2m+1)x - m}{x-1} = x + m$$

$$\Leftrightarrow (2m+1)x - m = (x+m)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m+2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, x = m + 2.$$

Giá trị $x = m + 2$ thoả mãn điều kiện của phương trình khi $m \neq -1$.

Kết luận

Vậy với $m = -1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$;

Với $m \neq -1$ phương trình có hai nghiệm $x = 0$ và $x = m + 2$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq m$. Khi đó ta có

$$\frac{(3m-2)x-5}{x-m} = -3$$

$$\Leftrightarrow (3m-2)x - 5 = -3x + 3m$$

$$\Leftrightarrow (3m+1)x = 3m + 5.$$

Với $m \neq -\frac{1}{3}$ nghiệm của phương trình cuối là $x = \frac{3m+5}{3m+1}$.

Nghiệm này thoả mãn điều kiện của phương trình khi và chỉ khi

$$\frac{3m+5}{3m+1} \neq m \Rightarrow 3m + 5 \neq 3m^2 + m$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1 \text{ và } m \neq \frac{5}{3}.$$

Kết luận

Với $m = -\frac{1}{3}$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = \frac{5}{3}$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \neq -\frac{1}{3}$, $m \neq -1$ và $m \neq \frac{5}{3}$ phương trình có một nghiệm $x = \frac{3m+5}{3m+1}$.

7. a) Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $m \neq -2$ và $\frac{2}{m+2} < 0$, suy ra $m < -2$.

Tổng của hai nghiệm bằng -3 khi $-\frac{2m+1}{m+2} = -3 \Rightarrow m = -5$ thoả mãn điều kiện $m < -2$

Đáp số : $m = -5$.

b) Phương trình có nghiệm kép khi $m \neq -2$ và $\Delta = 0$.

$$\Delta = (2m+1)^2 - 8(m+2) = 4m^2 - 4m - 15\ ;$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2} \text{ hoặc } m = -\frac{3}{2}.$$

Khi $m = \frac{5}{2}$ nghiệm kép của phương trình là $x = -\frac{2m+1}{m+2} = -\frac{2}{3}$.

Khi $m = -\frac{3}{2}$ nghiệm kép của phương trình là $x = 2$.

8. a) Ta có

$\Delta' = (m^2 - 1)^2 - 9 = (m^2 + 2)(m^2 - 4) = (m^2 + 2)(m + 2)(m - 2)$.

Với $m > 2$ thì $\Delta' > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. Vì $x_1x_2 = \dfrac{1}{9} > 0$ nên hai nghiệm cùng dấu. Hơn nữa

$x_1 + x_2 = -\dfrac{2(m^2 - 1)}{9} < 0$ với mọi $m > 2$ nên hai nghiệm đều âm.

b) Ta có $\dfrac{-2(m^2 - 1)}{9} = -4 \Leftrightarrow m^2 = 19 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{19}$.

Với $m = \pm\sqrt{19}$ thì $\Delta' > 0$.

Đáp số : $m = \pm\sqrt{19}$.

9. *Hướng dẫn* : Trước hết tìm điều kiện để phương trình đã cho có hai nghiệm. Sau đó sử dụng định lí Vi-ét.

Giải

Phương trình đã cho có hai nghiệm khi và chỉ khi biệt thức dương. Ta có :

$$\Delta' = (m + 1)^2 - 3(3m - 5) = m^2 - 7m + 16.$$

Các giá trị m tìm được phải thoả mãn điều kiện $m^2 - 7m + 16 > 0$ (tuy nhiên, trong trường hợp này tam thức bậc hai $m^2 - 7m + 16 > 0$ với mọi m. Xem §5 Chương IV).

Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$. Theo định lí Vi-ét ta có

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{3}, \quad x_1x_2 = \frac{3m - 5}{3}.$$

Từ đó suy ra

$$x_2 = \frac{m+1}{6} \text{ và } 3x_2^2 = \frac{3m - 5}{3}.$$

Khử x_2 ta được phương trình bậc hai đối với m :

$$m^2 - 10m + 21 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $m_1 = 7$, $m_2 = 3$.

- Với $m = 7$ ta được $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 = 4$.
- Với $m = 3$ ta được $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_1 = 2$.

10. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq \frac{4}{3}$.

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$3x - 4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 13 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x = \frac{9 \pm \sqrt{29}}{2}$. Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện $x \geq \frac{4}{3}$ nhưng khi thay vào phương trình ban đầu thì giá trị $\frac{9 - \sqrt{29}}{2}$ bị loại (vế trái dương nhưng vế phải âm).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = \frac{9 + \sqrt{29}}{2}$.

b) Điều kiện của phương trình là $x^2 - 2x + 3 > 0$.

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$x^2 - 2x + 3 = 4x^2 - 4x + 1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Khi thay các giá trị này vào phương trình ban đầu thì giá trị $\frac{1 - \sqrt{7}}{3}$ bị loại.

Đáp số : $x = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$.

c) Điều kiện của phương trình là $2x^2 + 3x + 7 > 0$.

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 7} = x + 2 \quad \Rightarrow 2x^2 + 3x + 7 = x^2 + 4x + 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0.$$

Phương trình cuối vô nghiệm, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Điều kiện của phương trình là $3x^2 - 4x - 4 \geq 0$ và $2x + 5 \geq 0$.

$$\sqrt{3x^2 - 4x - 4} = \sqrt{2x+5} \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 2x + 5$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Cả hai giá trị này đều thoả mãn các điều kiện và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$, $x = 3$.

11. a) Với $x \geq -\frac{2m}{3}$ phương trình đã cho trở thành

$$3x + 2m = x - m \Leftrightarrow 2x = -3m \Leftrightarrow x = -\frac{3m}{2}.$$

Ta có

$$-\frac{3m}{2} \geq -\frac{2m}{3} \Leftrightarrow -9m \geq -4m$$
$$\Leftrightarrow 5m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Với $x < -\frac{2m}{3}$ phương trình đã cho trở thành

$$-3x - 2m = x - m \Leftrightarrow 4x = -m \Leftrightarrow x = -\frac{m}{4}.$$

Ta có

$$-\frac{m}{4} < -\frac{2m}{3} \Leftrightarrow -3m < -8m$$
$$\Leftrightarrow 5m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết luận

Với $m > 0$ phương trình vô nghiệm ;

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm là $x = 0$;

Với $m < 0$ phương trình có hai nghiệm $x_1 = -\frac{3m}{2}$ và $x_2 = -\frac{m}{4}$.

b) $$|2x + m| = |x - 2m + 2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x + m = x - 2m + 2 & (1) \\ 2x + m = -x + 2m - 2. & (2) \end{array}\right.$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow x = -3m + 2$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow 3x = m - 2 \Leftrightarrow x = \frac{m-2}{3}$.

Vậy với mọi giá trị của m phương trình có nghiệm là

$$x_1 = -3m + 2 \text{ và } x_2 = \frac{m-2}{3}.$$

c) $m = 0$ phương trình trở thành

$$-x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

$m \neq 0$ phương trình đã cho là phương trình bậc hai, có $\Delta = 4m + 1$.

Với $m < -\frac{1}{4}$ phương trình vô nghiệm ;

Với $m \geq -\frac{1}{4}$ nghiệm của phương trình là

$$x_{1,2} = \frac{1 - 2m \pm \sqrt{4m+1}}{2m}.$$

d) Điều kiện của phương trình là $x > \frac{1}{2}$.

Với điều kiện đó vế trái dương, nên vế phải cũng dương hay $m > 1$.
Lúc đó ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{4x-2}}{2x-1} = m - 1 \quad &\Leftrightarrow \sqrt{2(2x-1)} = (m-1)(2x-1) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)}\left[\sqrt{2} - (m-1)\sqrt{2x-1}\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow (m-1)\sqrt{2x-1} = \sqrt{2} \\
&\Leftrightarrow (m-1)^2(2x-1) = 2 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{(m-1)^2 + 2}{2(m-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{(m-1)^2}.
\end{aligned}$$

Giá trị $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{(m-1)^2}$ thoả mãn điều kiện $x > \frac{1}{2}$.

Kết luận. Với $m \leq 1$ phương trình vô nghiệm.

Với $m > 1$ nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{(m-1)^2}$.

12. a) *Đáp số :* $x = -\frac{5}{13}$, $y = -\frac{22}{13}$.

b) Hệ phương trình vô nghiệm.

c) *Đáp số* : $x = \frac{11}{21}$, $y = \frac{13}{45}$.

d) *Đáp số* : $x = -1$, $y = 3$.

13. Gọi x là số xe 4 chỗ, y là số xe 7 chỗ. Điều kiện là x và y nguyên dương.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 85 \\ 4x + 7y = 445 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 35. \end{cases} \text{(thoả mãn điều kiện của bài toán)}$$

Vậy công ti có 50 xe 4 chỗ và 35 xe 7 chỗ.

14.

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 12 \\ 2x - y + 3z = 18 \\ -3x + 3y + 2z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 12 \\ 3y + z = -6 \\ 6z = 21. \end{cases}$

Đáp số : $(x\ ;\ y\ ;\ z) = \left(\frac{13}{6}\ ;\ -\frac{19}{6}\ ;\ \frac{7}{2}\right)$.

b) $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 4x - y + 3z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 7 \\ -5y - z = -16 \\ 0y + 0z = -2. \end{cases}$

Hệ phương trình vô nghiệm.

15. *Đáp số* : a) $(x\ ;\ y) = \left(\frac{1412}{2169}\ ;\ -\frac{161}{1205}\right)$; b) $(x\ ;\ y) \approx (-0,86\ ;\ 0,16)$.

16. *Đáp số* : a) $(x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3) \approx (-2,52\ ;\ 3,2\ ;\ -1,35)$;

b) $(x\ ;\ y\ ;\ z) \approx (-0,29\ ;\ -0,22\ ;\ 1,71)$.

17. Gọi x, y, z lần lượt là số đồng tiền xu loại 2000 đồng, 1000 đồng, 500 đồng.

Điều kiện là x, y, z nguyên dương.

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 1450 \\ 2000x + 1000y + 500z = 1500000 \\ y = 2(z - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1450 & (1) \\ 4x + 2y + z = 3000 & (2) \\ 2x + y - 2z = 0. & (3) \end{cases}$$

Trừ từng vế tương ứng của phương trình (2) với phương trình (1) ta được

$$3x + y = 1550. \qquad (4)$$

Cộng từng vế tương ứng của các phương trình (1), (2) và (3) ta có

$$7x + 4y = 4450. \qquad (5)$$

Giải hệ gồm hai phương trình (4) và (5) ta được

$$x = 350,\ y = 500.$$

Thay các giá trị của x, y vào phương trình (1) ta được $z = 600$.

Vậy cửa hàng đổi được 350 đồng tiền xu loại 2000 đồng, 500 đồng tiền xu loại 1000 đồng và 600 đồng tiền xu loại 500 đồng.

18. a) $\begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ mx - 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow (m+3)x = 11.$

Phương trình cuối vô nghiệm khi $m = -3$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm khi $m = -3$.

b) $\begin{cases} 2x - my = 5 \\ x + y \quad = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - my = 5 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases} \Rightarrow (m+2)y = 9.$

Phương trình cuối vô nghiệm khi $m = -2$.

Vậy với $m = -2$ thì hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

19. a) $x \leq \dfrac{2}{3}$ và $x \neq -1$.

b) $x \geq 2$ và $x \leq -4$. Không có số thực x nào thoả mãn điều kiện của phương trình.

c) $3x^2 + 6x + 11 > 0$ và $x \geq -\dfrac{1}{2}$. Vì ta có $3x^2 + 6x + 11 = 3(x+1)^2 + 8 > 0$

với mọi x, nên điều kiện của phương trình là $x \geq -\dfrac{1}{2}$.

d) $x \geq -4$ và $x \neq 3$, $x \neq -3$.

20. a) Hai phương trình tương đương khi $m = \dfrac{8}{7}$.

b) Hai phương trình tương đương khi $m = -\dfrac{4}{3}$.

21. a) Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$(m-1)(m+3)x = 4(m-1).$$

Với $m \neq 1$ và $m \neq -3$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{4}{m+3}$;

Với $m = 1$ mọi số thực x đều là nghiệm của phương trình ;

Với $m = -3$ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện của phương trình là $x \neq \dfrac{1}{2}$. Khi đó ta có

$$\frac{(m+3)x}{2x-1} = 3m+2 \quad \Leftrightarrow (m+3)x = (3m+2)(2x-1)$$

$$\Leftrightarrow (5m+1)x = 3m+2.$$

Nếu $m \neq -\dfrac{1}{5}$ thì phương trình cuối có nghiệm $x = \dfrac{3m+2}{5m+1}$.

Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho khi

$$\frac{3m+2}{5m+1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6m+4 \neq 5m+1 \Leftrightarrow m \neq -3.$$

Nếu $m = -\dfrac{1}{5}$ phương trình cuối vô nghiệm.

Kết luận

Với $m = -\dfrac{1}{5}$ hoặc $m = -3$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $m \neq -\dfrac{1}{5}$ và $m \neq -3$ nghiệm của phương trình đã cho là $x = \dfrac{3m+2}{5m+1}$.

c) Điều kiện của phương trình là $x \neq -3$. Khi đó ta có

$$\frac{8mx}{x+3} = (4m+1)x + 1 \Leftrightarrow 8mx = [(4m+1)x+1](x+3)$$

$$\Leftrightarrow (4m+1)x^2 + 4(m+1)x + 3 = 0. \qquad (1)$$

Với $m = -\dfrac{1}{4}$ phương trình (1) trở thành

$$3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Với $m \neq -\dfrac{1}{4}$ thì phương trình (1) là một phương trình bậc hai có

$$\Delta' = (2m-1)^2 \geq 0.$$

Lúc đó phương trình (1) có hai nghiệm

$$x_1 = -\frac{3}{4m+1},\ x_2 = -1.$$

Ta có $-\frac{3}{4m+1} \neq -3 \Leftrightarrow 4m + 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 0.$

Kết luận

Với $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{4}$ phương trình đã cho có một nghiệm $x = -1$.

Với $m \neq 0$ và $m \neq -\frac{1}{4}$ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = -1 \text{ và } x = -\frac{3}{4m+1}.$$

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 2$.

Khi đó ta có $\frac{(2-m)x}{x-2} = (m-1)x - 1 \Leftrightarrow (2-m)x = (x-2)[(m-1)x-1]$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - (m+1)x + 2 = 0. \quad (2)$$

Với $m = 1$ phương trình (2) có dạng

$$-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Với $m \neq 1$ thì phương trình (2) là một phương trình bậc hai có

$$\Delta = (m-3)^2 \geq 0.$$

Lúc đó phương trình (2) có hai nghiệm

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{2}{m-1}.$$

Ta có $\frac{2}{m-1} \neq 2 \Leftrightarrow m - 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq 2.$

Kết luận

Với $m = 1$ hoặc $m = 2$ phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$.

Với $m \neq 1$ và $m \neq 2$ phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x = 1 \text{ và } x = \frac{2}{m-1}.$$

22. a) Phương trình vô nghiệm khi $\Delta' < 0$.

Xét $\Delta' = (3m-1)^2 - 3(3m^2 - m + 1) = -3m - 2$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow -3m - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow m > -\frac{2}{3}.$$

b) Khi $m = -1$ phương trình đã cho trở thành $3x^2 - 8x + 5 = 0$ và có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{5}{3}$.

23. Với $m \neq -1$ ta có $\Delta = (m-3)^2 \geq 0$, do đó phương trình luôn luôn có hai nghiệm x_1, x_2.

Xét $x_1 + x_2 = 3 \Leftrightarrow \dfrac{1-3m}{m+1} = 3 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{3}$.

Lúc đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x = -1$ và $x = 4$.

24. a) Điều kiện của phương trình là $x \geq -\frac{3}{5}$. Ta có

$$\sqrt{5x+3} = 3x - 7 \Rightarrow 5x + 3 = (3x-7)^2$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 47x + 46 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{47+\sqrt{553}}{18}$, $x_2 = \dfrac{47-\sqrt{553}}{18}$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình, tuy nhiên khi thay vào phương trình đã cho thì giá trị x_2 bị loại.

Đáp số : $x = \dfrac{47+\sqrt{553}}{18}$.

b) Điều kiện của phương trình là $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$. Ta có

$$\sqrt{3x^2 - 2x - 1} = 3x + 1 \quad \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 8x + 2 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = -1$.

Cả hai giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình, nhưng thử vào phương trình đã cho thì giá trị $x_2 = -1$ bị loại.

Đáp số : $x = -\frac{1}{3}$.

c) Điều kiện của phương trình là $4x^2 + 7x - 2 \geq 0$ và $x \neq -2$. Ta có

$$\frac{\sqrt{4x^2 + 7x - 2}}{x + 2} = \sqrt{2} \Rightarrow 4x^2 + 7x - 2 = 2(x + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 10 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -2$.

Chỉ có giá trị $x_1 = \frac{5}{2}$ thoả mãn điều kiện và nghiệm đúng phương trình đã cho.

Đáp số : $x = \frac{5}{2}$.

d) Điều kiện của phương trình là $2x^2 + 3x - 4 \geq 0$ và $7x + 2 \geq 0$. Ta có

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 4} = \sqrt{7x + 2} \Rightarrow 2x^2 + 3x - 4 = 7x + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, nhưng giá trị $x_2 = -1$ không thoả mãn điều kiện của phương trình nên bị loại, giá trị $x_1 = 3$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

25. a) Với $x \geq \frac{5m}{2}$ phương trình đã cho trở thành

$$2x - 5m = 2x - 3m \Leftrightarrow 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Vậy với $m = 0$ thì mọi $x \geq 0$ đều là nghiệm của phương trình.

Với $x < \frac{5m}{2}$ phương trình đã cho trở thành

$$-2x + 5m = 2x - 3m$$

$$\Leftrightarrow 4x = 8m \Leftrightarrow x = 2m.$$

Vì $x < \frac{5m}{2}$ nên $2m < \frac{5m}{2} \Leftrightarrow m > 0.$

Kết luận

Với $m > 0$ phương trình có nghiệm là $x = 2m$.

Với $m = 0$ phương trình có nghiệm là mọi số thực không âm.

Với $m < 0$ phương trình vô nghiệm.

b) Ta có

$$|3x + 4m| = |4x - 7m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 4m = 4x - 7m \\ 3x + 4m = -4x + 7m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 11m \\ x = \frac{3m}{7}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 11m$ và $x = \frac{3m}{7}$ với mọi giá trị của m.

c) Với $m = -1$ phương trình đã cho trở thành

$$-5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Với $m \neq -1$ phương trình đã cho là một phương trình bậc hai, có biệt thức $\Delta = -24m + 1$.

Nếu $m \leq \frac{1}{24}$ thì $\Delta \geq 0$, phương trình có hai nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{2m - 3 \pm \sqrt{1 - 24m}}{2(m + 1)}.$$

Kết luận

Với $m > \frac{1}{24}$ phương trình vô nghiệm.

Với $m \leq \dfrac{1}{24}$ và $m \neq -1$ phương trình có hai nghiệm

$$x_{1,\,2} = \frac{2m - 3 \pm \sqrt{1 - 24m}}{2(m + 1)}.$$

Với $m = -1$ phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1}{5}$.

d) Điều kiện của phương trình là $x \neq 3$. Ta có

$$\frac{x^2 - (m+1)x - \dfrac{21}{4}}{x - 3} = 2x + m \Rightarrow x^2 - (m+1)x - \frac{21}{4} = (x-3)(2x + \mathrm{m})$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2m - 5)x + \frac{21}{4} - 3m = 0.$$

Phương trình cuối luôn có nghiệm $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = \dfrac{7 - 4m}{2}$.

Ta có $\dfrac{7 - 4m}{2} \neq 3 \Leftrightarrow m \neq \dfrac{1}{4}$.

Kết luận

Với $m \neq \dfrac{1}{4}$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{3}{2}$ và $x = \dfrac{7 - 4m}{2}$.

Với $m = \dfrac{1}{4}$ phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{3}{2}$.

26. Đặt $u = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2} + x}$, $v = \sqrt{\dfrac{1}{2} - x}$, điều kiện $v \geq 0$.

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - u & (1) \\ u^3 + u^2 - 2u = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Leftrightarrow u(u^2 + u - 2) = 0$.

Phương trình cuối có 3 nghiệm $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $u_3 = -2$.

- Với $u = 0$ ta có $v = 1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$.
- Với $u = 1$ ta có $v = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

• Với $u = -2$ ta có $v = 3 \Rightarrow x = -\dfrac{17}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm

$$x = -\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{2} \text{ và } x = -\frac{17}{2}.$$

27. a) *Đáp số :* $(x\,;\,y) = (2\,;\,3)$.

b) Hệ phương trình tương đương với một phương trình $-2x + y = -3$, do đó vô số nghiệm

$$(x\,;\,y) = (a\,;\,2a-3),\ a \text{ tuỳ ý.}$$

c) *Đáp số :* $(x\,;\,y) = (15\,;\,20{,}5)$.

d) *Đáp số :* $(x\,;\,y) = \left(-\dfrac{14}{11}\,;\,-\dfrac{48}{55}\right)$.

28. a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 2x + 7y + z = 5 \\ -3x + 3y - 2z = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 3y + 7z = 1 \\ -32z = -4. \end{cases}$

Đáp số : $(x\,;\,y\,;\,z) = \left(\dfrac{55}{24}\,;\,\dfrac{1}{24}\,;\,\dfrac{1}{8}\right)$.

b) $\begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ -5y + 10z = 14 \\ -5y + 10z = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 3y + 4z = 3 \\ -5y + 10z = 14 \\ 0y + 0z = -4. \end{cases}$

Phương trình cuối vô nghiệm, suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

29. a) $\begin{cases} 3x + ay = 5 \\ 2x + y = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2ay = 10 \\ 6x + 3y = 3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 2ay = 10 \\ (3-2a)y = 3b - 10. \end{cases}$

Phương trình $(3 - 2a)y = 3b - 10$ vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3 - 2a = 0 \\ 3b - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô số nghiệm khi $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{10}{3}$.

b) $\begin{cases} ax + 2y = a \\ 3x - 4y = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 4y = 2a \\ 3x - 4y = b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax + 4y = 2a \\ (3 + 2a)x = b + 1 + 2a. \end{cases}$

Phương trình $(3 + 2a)x = b + 1 + 2a$ vô số nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 3 + 2a = 0 \\ b + 1 + 2a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ b = 2. \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô số nghiệm khi $a = -\frac{3}{2}$, $b = 2$.

30. Gọi x (đồng) là giá vé người lớn, y (đồng) là giá vé trẻ em (điều kiện $x > 0$, $y > 0$). Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x + 3y = 370\,000 \\ 2x + 2y = 200\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 100\,000 \\ -y = -30\,000. \end{cases}$$

Suy ra $y = 30\,000$, $x = 70\,000$.

Vậy giá vé người lớn là 70 000 đồng, giá vé trẻ em là 30 000 đồng.

31. Gọi a là chữ số hàng chục, b là chữ số hàng đơn vị. Điều kiện a, b nguyên, $1 \leq a \leq 9$ và $0 \leq b \leq 9$. Ta có

$$\begin{cases} 10a + b = 2ab + 18 \\ a^2 + b^2 + 9 = 10a + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + 9 = 2ab + 18$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 = 9 \Rightarrow a - b = \pm 3.$$

Trường hợp 1

$$a - b = 3 \Rightarrow a = b + 3.$$

Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình ta được

$$11b + 30 = 2(b + 3)b + 18 \Rightarrow 2b^2 - 5b - 12 = 0.$$

Phương trình cuối có hai nghiệm $b_1 = 4$, $b_2 = -\frac{3}{2}$.

Giá trị $b_2 = -\dfrac{3}{2}$ không thoả mãn điều kiện $0 \le b \le 9$ nên bị loại.

Vậy $b = 4$, suy ra $a = 7$.

Trường hợp 2

$$a - b = -3 \Rightarrow a = b - 3.$$

Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình ta được

$$11b - 30 = 2(b-3)b + 18 \Rightarrow 2b^2 - 17b + 48 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy số phải tìm là 74.

32. Gọi x là số xe tải chở 3 tấn, y là số xe tải chở 5 tấn và z là số xe tải chở 7,5 tấn. Điều kiện x, y, z nguyên dương.

Theo giả thiết của bài toán ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7{,}5z = 290 \\ 22{,}5z = 6x + 15y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7{,}5z = 290 \\ -2x - 5y + 7{,}5z = 0. \end{cases}$$

Cộng từng vế phương trình thứ hai với phương trình thứ ba ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ 3x + 5y + 7{,}5z = 290 \\ x + 15z = 290. \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất với -5 rồi cộng từng vế với phương trình thứ hai ta được

$$\begin{cases} x + y + z = 57 \\ -2x + 2{,}5z = 5 \\ x + 15z = 290. \end{cases}$$

Từ phương trình cuối suy ra $x = 290 - 15z$.

Thay giá trị tìm được của x vào phương trình thứ hai ta được

$$32{,}5z = 585 \text{ hay } z = 18.$$

Từ đó suy ra $x = 20$, $y = 19$. Các giá trị của x, y, z vừa tìm được thoả mãn điều kiện của bài toán.

Vậy có 20 xe chở 3 tấn, 19 xe chở 5 tấn và 18 xe chở 7,5 tấn.

33. *Hướng dẫn.* Giải và biện luận theo m có nghĩa là xét xem với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm, với giá trị nào của m thì hệ phương trình có 1 nghiệm, giá trị nghiệm là bao nhiêu, với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm.

Để giải và biện luận hệ phương trình trên ta dùng phương pháp cộng đại số để khử một ẩn.

Giải

Nhân phương trình thứ nhất của hệ với $m + 2$, nhân phương trình thứ hai với 2 ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(m+2)x + (3m+1)(m+2)y = (m-1)(m+2) \\ 2(m+2)x + 2(4m+3)y = 2m \end{cases}$$

Trừ hai phương trình vế theo vế ta được phương trình :

$$(3m^2 - m - 4)y = m^2 - m - 2$$

$$\Rightarrow (m+1)(3m-4)y = (m+1)(m-2). \qquad (1)$$

• Với $m = -1$ phương trình (1) có dạng

$$0y = 0.$$

Phương trình này nhận mọi giá trị thực của y làm nghiệm. Lúc đó thay $m = -1$ vào hệ phương trình đã cho, hai phương trình trở thành một phương trình

$$x - y = -1 \Rightarrow y = x + 1,\ x \text{ tuỳ ý}.$$

• Với $m = \frac{4}{3}$ phương trình (1) có dạng

$$0y = -\frac{14}{9}.$$

Phương trình này vô nghiệm, do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

• Với $m \neq -1$ và $m \neq \frac{4}{3}$, phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$y = \frac{m-2}{3m-4}.$$

Thay vào một trong hai phương trình của hệ đã cho ta suy ra

$$x = \frac{-m+3}{3m-4}.$$

Kết luận

$m = \frac{4}{3}$: Hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

$m = -1$: Hệ phương trình đã cho có vô số nghiệm

$$x = a,\ y = a + 1,\ a \text{ là số thực tuỳ ý.}$$

$m \neq -1, m \neq \frac{4}{3}$: Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất :

$$(x\ ;\ y) = \left(\frac{3-m}{3m-4}\ ;\ \frac{m-2}{3m-4}\right).$$