LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. $x^4 + y^4 \geq x^3y + xy^3 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x^3(x - y) + y^3(y - x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2(x^2 + y^2 + xy) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2\left(\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right) \geq 0$ (đúng).

2. $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4y^2 - 12y + 3(z^2 - 2z) + 14 > 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (2y - 3)^2 + 3(z - 1)^2 + 1 > 0$ (đúng).

3. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b} \Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab}) \geq (\sqrt{a} + \sqrt{b})\sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - 2\sqrt{ab}) \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ (đúng).

4. Từ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}$ và $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ suy ra

$(a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$ hay $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a + b}$.

5. Từ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ và $c + d \geq 2\sqrt{cd}$ suy ra

$$a + b + c + d \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{cd})$$

$$\geq 2.2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}$$

$$\Rightarrow \frac{a + b + c + d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

6. Từ $a + b + c + d \geq 4\sqrt[4]{abcd}$ và $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \geq 4\sqrt[4]{\dfrac{1}{abcd}}$

suy ra $(a + b + c + d)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}\right) \geq 16$

hay $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} \geq \dfrac{16}{a + b + c + d}$.

7. $a^2b + \dfrac{1}{b} \geq 2\sqrt{a^2b.\dfrac{1}{b}} = 2a.$

8. Từ $a + b \geq 2\sqrt{ab},\ b + c \geq 2\sqrt{bc},\ c + a \geq 2\sqrt{ca}$

suy ra $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

9. $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \geq 2\sqrt{(a + b).2\sqrt{ab}}$.

10. $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1+1+1+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)$

$$\geq 3+2+2+2=9 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

11. $y=\dfrac{4(x+1-x)}{x}+\dfrac{9(x+1-x)}{1-x}$

$$=4+9+\frac{4(1-x)}{x}+9.\frac{x}{1-x} \geq 13+2\sqrt{4.\frac{(1-x)}{x}.9.\frac{x}{1-x}}=25$$

$\Rightarrow y \geq 25,\ \forall x \in (0\ ;1)$.

Đẳng thức $y=25$ xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\dfrac{4(1-x)}{x}=\dfrac{9x}{1-x}=6\\ x \in (0\ ;1)\end{cases} \text{ hay } x=\frac{2}{5}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 25 đạt tại $x=\dfrac{2}{5}$.

12. $y=4x^3-x^4=x^3(4-x)$

$$\Rightarrow 3y=x.x.x(12-3x) \leq \left(\frac{x+x}{2}\right)^2\left(\frac{x+12-3x}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 48y \leq [2x(12-2x)]^2 \leq \left(\frac{2x+12-2x}{2}\right)^4=6^4$$

$$\Rightarrow y \leq \frac{6^4}{48}=27,\ \forall x \in [0\ ;4].$$

$$y=27 \Leftrightarrow \begin{cases}x=x\\ x=12-3x\\ 2x=12-2x\\ x \in [0\ ;4]\end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng 27 đạt được khi $x=3$.

13. Vế phải có nghĩa khi $1 \leq x \leq 5$.

Ta có $y^2=(\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x})^2=4+2\sqrt{(x-1)(5-x)}$

$$\Rightarrow \begin{cases}y^2 \geq 4, \forall x \in [1\ ;5]\\ y^2 \leq 4+(x-1)+(5-x)=8\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y \geq 2\\ y \leq 2\sqrt{2}\end{cases} \forall x \in [1\ ;5].$$

Hơn nữa $\quad y = 2 \Leftrightarrow (x-1)(5-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$

$$y = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x - 1 = 5 - x \Leftrightarrow x = 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số đã cho bằng $2\sqrt{2}$ khi $x = 3$, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng 2 khi $x = 1$ hoặc $x = 5$.

14. $|x - z| = |(x-y) + (y-z)| \leq |x - y| + |y - z|$.

15. a) Điều kiện là $x - 5 \neq 0$.

b) Điều kiện là x tuỳ ý.

c) Điều kiện là $x^2 - x - 2 \geq 0$.

d) Điều kiện là x tuỳ ý.

16. $x = -7$ làm hai vế của bất phương trình đầu vô nghĩa nên $x = -7$ không là nghiệm của bất phương trình đó. Mặt khác, $x = -7$ thoả mãn bất phương trình sau nên $x = -7$ là nghiệm của bất phương trình này.

Nhận xét : Phép giản ước số hạng $-\dfrac{1}{x+7}$ ở hai vế của bất phương trình đầu làm mở rộng tập xác định của bất phương trình đó, vì vậy có thể dẫn đến nghiệm ngoại lai.

17. Thử trực tiếp ta thấy ngay $x = -3$ là nghiệm bất phương trình (1) nhưng không là nghiệm bất phương trình (2), vì vậy (1) và (2) không tương đương, do đó phép bình phương hai vế một bất phương trình không phải là phép biến đổi tương đương.

18. Điều kiện của (1) là $(x-1)(x-2) \geq 0$, còn điều kiện của (2) là $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \geq 0. \end{cases}$

Hai bất phương trình đã cho không tương đương với nhau vì có $x = -1$ là một nghiệm của (1) nhưng không là nghiệm của (2).

Nhận xét : Phép biến đổi đồng nhất $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ làm mở rộng tập xác định, dẫn tới thay đổi điều kiện của phương trình, do đó có thể làm xuất hiện nghiệm ngoại lai.

19. Nếu nhân hai vế của $\frac{1}{x} \leq 1$ với x, ta được bất phương trình mới $x \geq 1$; bất phương trình này không tương đương với bất phương trình đã cho vì đã làm mất đi tất cả các nghiệm âm của nó.

Ghi nhớ : Không được nhân hay chia hai vế của một bất phương trình với một biểu thức chứa ẩn mà không biết dấu của biểu thức đó.

20. Nếu bình phương hai vế (khử căn thức chứa ẩn) của bất phương trình $\sqrt{1-x} \leq x$ ta nhận được bất phương trình $1 - x \leq x^2$. Bất phương trình nhận được không tương đương với bất phương trình đã cho vì có $x = 2$ không phải là nghiệm bất phương trình đã cho nhưng lại là nghiệm của bất phương trình mới nhận được sau phép bình phương.

Ghi nhớ : Không được bình phương hai vế một bất phương trình vì có thể làm xuất hiện nghiệm ngoại lai.

21. Điều kiện của bất phương trình đã cho là

$$\begin{cases} 5 - x \geq 0 & \text{(a)} \\ x - 10 > 0 & \text{(b)} \\ x \geq 0 & \text{(c)} \\ (x-4)(x+5) \neq 0 & \text{(d)} \end{cases}$$

Nếu x là một nghiệm của bất phương trình đã cho thì trước hết x phải thoả mãn (a) và (b), suy ra $(5 - x) + (x - 10) > 0$, do đó $-5 > 0$, vô lí. Vì vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

22. a) Theo bất đẳng thức Cô-si ta có $(x^2+1) + \frac{1}{(x^2+1)} \geq 2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2+1} \geq 1$, $\forall x$. Vì vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Tương tự a).

c) Tương tự a) (sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ và đồng nhất thức $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$).

23. a) Khai triển vế trái và rút gọn các số hạng giống nhau ở hai vế ta được bất phương trình tương đương $2x - 1 \le 3 \Leftrightarrow x \le 2$.

b) *Đáp số :* $x > -1{,}1$.

c) *Đáp số :* $0 \le x < 3$.

d) *Đáp số :* $x < -5$.

24. a) $\sqrt{(x-4)^2(x+1)} > 0 \Leftrightarrow (x-4)^2(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \ne 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 4 \\ x > -1. \end{cases}$

Tập nghiệm của bất phương trình là : $(-1 \,;\, 4) \cup (4 \,;\, +\infty)$.

b) *Đáp số :* $x > 3$.

25. a) $\begin{cases} -2x + \dfrac{3}{5} > \dfrac{2x - 7}{3} \\ x - \dfrac{1}{2} < \dfrac{5(3x-1)}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -30x + 9 > 10x - 35 \\ 2x - 1 < 15x - 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -40x > -44 \\ -13x < -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1{,}1 \\ x > \dfrac{4}{13}. \end{cases}$$

Đáp số : $\dfrac{4}{13} < x < 1{,}1$.

b) *Đáp số :* $x \le \dfrac{13}{27}$.

26. $mx - m^2 > 2x - 4 \Leftrightarrow (m-2)x > (m-2)(m+2)$.

Nếu $m > 2$ thì $m - 2 > 0$, bất phương trình có nghiệm là $x > m + 2$;

Nếu $m < 2$ thì $m - 2 < 0$, bất phương trình có nghiệm là $x < m + 2$;

Nếu $m = 2$ thì bất phương trình trở thành $0x > 0$, bất phương trình vô nghiệm.

27. $f(x) = (-2x+3)(x-2)(x+4)$

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

28. $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

29. $f(x) = \dfrac{3(x+2)-(2x-1)}{(2x-1)(x+2)} = \dfrac{x+7}{(2x-1)(x+2)}$

x	$-\infty$		-7		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

30. $f(x) = (4x-1)(x+2)(3x-5)(-2x+7)$

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$4x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x+7$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

31. $\dfrac{3}{2-x} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{3}{2-x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{3-2+x}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{2-x} < 0.$ (1)

Bảng xét dấu vế trái của (1)

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
vế trái của (1)		$-$	0	$+$	||	$-$	

Đáp số : $x < -1$, $x > 2$.

32. $\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-3}{x^2-4} - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{(x-2)(x+2)} \geq 0.$ (1)

Bảng xét dấu vế trái của (1)

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Vế trái của (1)		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Đáp số : $-2 < x \leq -1$, $x > 2$.

33. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}>\dfrac{1}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{x+2+x-1}{(x+2)(x-1)}>\dfrac{1}{x-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2)-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{(x-1)(x+2)(x-2)}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-4)}{(x-1)(x+2)(x-2)}>0. \qquad (1)$$

Bảng xét dấu vế trái của (1)

x	$-\infty$		-2		0		1		2		4		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Vế trái của (1)		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Đáp số : $-2<x<0$; $1<x<2$; $4<x<+\infty$.

34. Vì $|x-3|\geq 0, \forall x$ nên $|x-3|>-1, \forall x$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty\ ;+\infty)$.

35. $|5-8x|\leq 11 \Leftrightarrow |8x-5|\leq 11 \Leftrightarrow -11\leq 8x-5\leq 11$

$$\Leftrightarrow -11+5\leq 8x\leq 11+5 \Leftrightarrow \frac{-3}{4}\leq x\leq 2.$$

Đáp số : $\dfrac{-3}{4}\leq x\leq 2$.

36. Bỏ dấu giá trị tuyệt đối ở vế trái của bất phương trình ta có

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\|x+2\|$		$-(x+2)$	0	$x+2$		$x+2$	
$\|-2x+1\|$		$(-2x+1)$		$(-2x+1)$	0	$-(-2x+1)$	

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2 \\ -(x+2)+(-2x+1) \le x+1\end{cases} \\ \begin{cases}-2 < x \le \dfrac{1}{2} \\ (x+2)+(-2x+1) \le x+1\end{cases} \\ \begin{cases}x > \dfrac{1}{2} \\ (x+2)-(-2x+1) \le x+1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2 \\ 4x \ge -2\end{cases} \\ \begin{cases}-2 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x \ge 2\end{cases} \\ \begin{cases}x > \dfrac{1}{2} \\ 2x \le 0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -2 \\ x \ge -\dfrac{1}{2}\end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases}-2 < x \le \dfrac{1}{2} \\ x \ge 1\end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases}x > \dfrac{1}{2} \\ x \le 0.\end{cases} \text{(vô nghiệm)}\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

37. a) Điểm $O(0\ ;\ 0)$ có toạ độ thoả mãn bất phương trình, do đó miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $3 + 2y = 0$ chứa O (bỏ bờ).

b) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $2x - 1 = 0$ chứa O (bỏ bờ).

c) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $-x + 5y = -2$ chứa O (bỏ bờ).

d) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $2x + y = 1$ không chứa O (bỏ bờ).

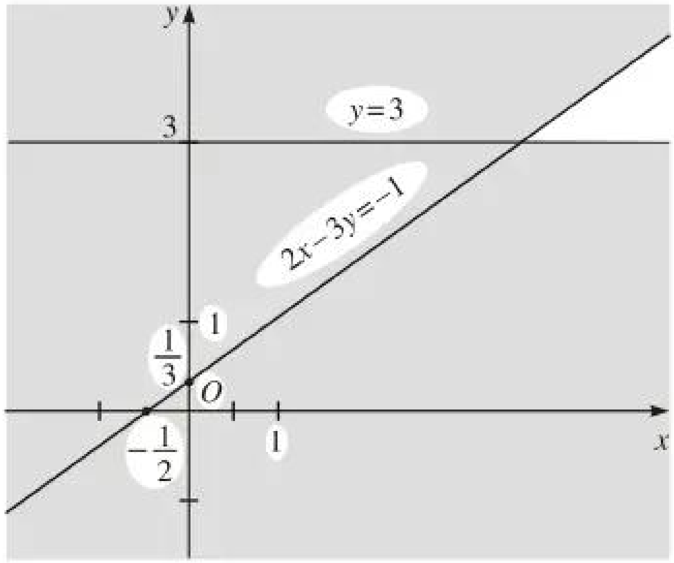
e) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $-3x + y = -2$ không chứa O.

f) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ $2x - 3y = -5$ chứa điểm O.

38. a) $\begin{cases} 2x - 1 \le 0 \\ -3x + 5 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$ vô nghiệm.

b) Miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị tô đen (không kể bờ) (h. 45).



Hình 45

39. Gọi x là diện tích trồng đậu, y là diện tích trồng cà, (đơn vị $a = 100 \text{ m}^2$), điều kiện $x \ge 0$, $y \ge 0$, ta có $x + y \le 8$.

Số công cần dùng là $20x + 30y \le 180$ hay $2x + 3y \le 18$.

Số tiền thu được là

$$F = 3\,000\,000x + 4\,000\,000y \text{ (đồng)}$$

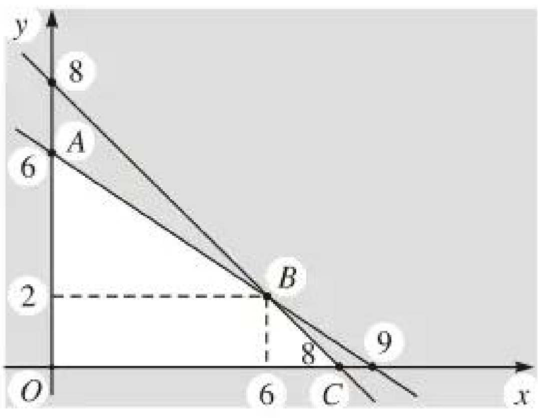
hay $$F = 3x + 4y \text{ (triệu đồng).}$$

Ta cần tìm x, y thoả mãn hệ bất phương trình

$$\text{(H)} \begin{cases} x + y \le 8 \\ 2x + 3y \le 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

sao cho $F = 3x + 4y$ đạt giá trị lớn nhất.

Biểu diễn tập nghiệm của (H) ta được miền tứ giác $OABC$ với $A(0 ; 6)$, $B(6 ; 2)$, $C(8 ; 0)$ và $O(0 ; 0)$ (h. 46).



Hình 46

Xét giá trị của F tại các đỉnh O, A, B, C và so sánh ta suy ra $x = 6$, $y = 2$ (toạ độ điểm B) là diện tích cần trồng mỗi loại để thu được nhiều tiền nhất là $F = 26$ (triệu đồng).

Đáp số : Trồng 6a đậu, 2a cà, thu hoạch 26 000 000 đồng.

40.

a)

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x^2 + 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$4x^2 - 3x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{37}}{6}$		$\frac{5+\sqrt{37}}{6}$		$+\infty$
$-3x^2 + 5x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Tam thức $3x^2 + x + 5$ có biệt thức $\Delta = -59 < 0$ và hệ số $a = 3 > 0$.

Vậy $3x^2 + x + 5 > 0, \forall x$.

41. a) $x^2 - 2x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 > 0$ (đúng với mọi x) ;

b) $x^2 + 9 > 6x \quad \Leftrightarrow (x-3)^2 > 0$ (đúng với mọi $x \neq 3$).

42. a) $6x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x \geq \dfrac{2}{3}$;

b) $\dfrac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 18 < 0 \Leftrightarrow -6 < x < -3$.

43. a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+3x-10} < 0 \quad \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 2$.

b) $\dfrac{10-x}{5+x^2} > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 20 - 2x > 5 + x^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3$.

44. a) $\dfrac{x+1}{x-1}+2>\dfrac{x-1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{3x-1}{x-1}>\dfrac{x-1}{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2-x-(x-1)^2}{x(x-1)}>0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x-1}{x(x-1)}>0$$

$$\Leftrightarrow x<-1 \text{ hoặc } 0<x<\frac{1}{2} \text{ hoặc } x>1.$$

b) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+3}<\dfrac{3}{x+2} \Leftrightarrow \dfrac{x+3+2x+2}{(x+1)(x+3)}<\dfrac{3}{x+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(3x+5)(x+2)-3(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)}<0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x}{(x+1)(x+2)(x+3)}<0$$

$$\Leftrightarrow x<-3 \text{ hoặc } -2<x<-1 \text{ hoặc } x>1.$$

Đáp số : $x<-3$ hoặc $-2<x<-1$ hoặc $x>1$.

45. a) $\begin{cases} x^2\geq 0{,}25 \\ x^2-x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-0{,}25\geq 0 \\ x^2-x\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0{,}5\leq x\leq 1.$

b) $\begin{cases} (x-1)(2x+3)>0 \\ (x-4)(x+\frac{1}{4})\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(1\,;+\infty) \\ x\in\left[-\dfrac{1}{4}\,;4\right] \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1\,;4].$

46. a) $\begin{cases} x^2\geq 4x \\ (2x-1)^2<9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x\geq 0 \\ -3<2x-1<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty\,;0]\cup[4\,;+\infty) \\ -1<x<2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -1<x\leq 0.$$

b) $\begin{cases} 2x-3<(x+1)(x-2) \\ x^2-x\leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1>0 \\ x^2-x-6\leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(-\infty\,;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right) \\ -2\leq x\leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-2\,;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\,;3\right].$$

47. a) $2m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1-\sqrt{41}}{4}$; $m > \dfrac{1+\sqrt{41}}{4}$.

b) $-m^2 + m + 9 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\sqrt{37}}{2} < m < \dfrac{1+\sqrt{37}}{2}$.

48. a) $(2m-1)^2 - 4(m+1)(m-2) \geq 0 \Leftrightarrow 9 \geq 0$. Bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

b) $m^2 - (2m-1)(m+1) < 0 \Leftrightarrow -m^2 - m + 1 < 0$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty ; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} ; +\infty\right)$.

49. a) $\begin{cases} (2m-1)^2 - 4(m^2-m) \geq 0 \\ \dfrac{1}{m^2-m} > 0 \\ \dfrac{2m-1}{m^2-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 0 \\ m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m > 1. \\ 2m-1 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (m-2)^2 - (m+3)(m-1) \geq 0 \\ \dfrac{m-2}{m+3} < 0 \\ \dfrac{m-1}{m+3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m + 7 \geq 0 \\ (m-2)(m+3) < 0 \\ (m-1)(m+3) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{7}{6} \\ -3 < m < 2 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \dfrac{7}{6}$.

50. a) $\begin{cases} 2m - 1 > 0 \\ m^2 - (m-2)(2m-1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{1}{2} \\ -m^2 + 5m - 2 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0{,}5 \\ \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{5+\sqrt{17}}{2} \\ m < \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

b) $\begin{cases} m^2 - m - 2 < 0 \\ (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2 \\ 9 \le 0 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm.

51. Để tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ có dấu không đổi, điều kiện cần và đủ là $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

a) Điều kiện là $(m+2)^2 - 8(m^2 - m - 1) < 0 \Leftrightarrow -7m^2 + 12m + 12 < 0$

$\Leftrightarrow m \in \left(-\infty\,;\, \dfrac{6-\sqrt{120}}{7}\right) \cup \left(\dfrac{6+\sqrt{120}}{7}\,;\, +\infty\right)$.

b) Điều kiện là $\begin{cases} m^2 - m - 1 \ne 0 \\ (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 \ne 0 \\ 5 < 0. \end{cases}$

Không có giá trị nào của m thoả mãn điều kiện này.

52. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ sẽ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi $ac < 0$.

a) Nếu $m = \pm 1$ thì phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (loại).

Nếu $m \ne \pm 1$ thì để phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu, điều kiện là $(m^2 - 1)(m^2 + m) < 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 m(m-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.

b) $x^2 - (m^3 + m - 2)x + m^2 + m - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu khi và chỉ khi $m^2 + m - 5 < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2} < m < \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

53. Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt, điều kiện cần và đủ là $\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ ac > 0 \\ ab < 0. \end{cases}$

a) $x^2 - 2x + m^2 + m + 3 = 0$ có $\Delta' = -m^2 - m - 2 < 0, \forall m$. Do đó không có giá trị nào của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) $(m^2 + m + 3)x^2 + (4m^2 + m + 2)x + m = 0$ có $a = m^2 + m + 3 > 0, \forall m$ và có $b = 4m^2 + m + 2 > 0, \forall m$ nên $ab > 0, \forall m$. Vì vậy không có giá trị nào của m để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt.

54. Chú ý rằng $m^2 + m + 1 > 0$; $-m^2 - 9 < 0$, $\forall m$ nên nếu $x > 0$, $y < 0$ thì phương trình thứ nhất có vế trái dương, vế phải âm. Do đó không có giá trị nào của m làm cho hệ đã cho có nghiệm thoả mãn điều kiện $x > 0$, $y < 0$.

55. a) $5x^2 - x + m > 0, \forall x \Leftrightarrow \Delta = 1 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}$.

b) Khi $m = 0$, bất phương trình trở thành $-10x - 5 < 0$, không nghiệm đúng với mọi x.

Do đó bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 25 + 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -5.$$

56. a) $\frac{x^2 - mx - 2}{x^2 - 3x + 4} > -1 \Leftrightarrow x^2 - mx - 2 > -x^2 + 3x - 4$ (do $x^2 - 3x + 4 > 0$, $\forall x$)

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m + 3)x + 2 > 0.$$

Bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi $\Delta < 0$

$$(m + 3)^2 - 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < m + 3 < 4 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

b) + Nếu $m = 0$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x ;

+ Nếu $m = -2$ thì bất phương trình trở thành $-4x + 2 > 0$, không nghiệm đúng với mọi x.

+ Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -2$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m(m + 2) > 0 \\ \Delta' = m^2 - 2m(m + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(m + 2) > 0 \\ -m^2 - 4m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < -4 \text{ ; } m > 0.$$

Đáp số : $m < -4$; $m \geq 0$.

57. a) Bất phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $5x^2 - x + m > 0$ nghiệm đúng với mọi x

$$\Leftrightarrow 1 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{20}.$$

Đáp số : $m > \frac{1}{20}$.

b) Cần tìm m để

$$mx^2 - 10x - 5 < 0, \forall x \quad (1)$$

Nếu $m = 0$ thì bất phương trình (1) trở thành $-10x - 5 < 0$ không nghiệm đúng với mọi x.

Nếu $m \neq 0$ thì bất phương trình (1) nghiệm đúng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m < 0 \\ \Delta' = 25 + 5m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < -5.$$

Đáp số : $m < -5$.

58. a) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-3)^2 - 4(m-5)(m^2+m+1) > 0 \\ \dfrac{-(2m-3)}{m^2+m+1} > 0 & (1) \\ \dfrac{m-5}{m^2+m+1} > 0. & (2) \end{cases}$$

Vì $m^2 + m + 1 > 0$ nên bất phương trình (1) $\Leftrightarrow$ $m < \dfrac{3}{2}$ và

bất phương trình (2) $\Leftrightarrow$ $m > 5$.

Do đó không có giá trị nào của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -\dfrac{b}{a} > 0 \\ \dfrac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - (2 - 2m + 9m^2) > 0 \\ \dfrac{6m}{1} > 0 \\ \dfrac{9m^2 - 2m + 2}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 2 > 0 \\ m > 0 \\ 9m^2 - 2m + 2 > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Đáp số : $m > 1$.

59. $(x^2 - y^2)^2 - 4xy(x-y)^2 = (x-y)^2\left[(x+y)^2 - 4xy\right]$

$= (x-y)^2(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x-y)^2, \forall x, y.$

60. $x^2 + 2y^2 + 2xy + y + 1 = (x+y)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0,\ \forall x, y.$

61. $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 2\sqrt{a}.2\sqrt{b}.2\sqrt{ac}.2\sqrt{bc} = 16abc.$

62. Theo bài **7** ta có

$$a^2b + \frac{1}{b} \geq 2a, \text{ do đó}$$

$$a \leq \frac{1}{2}\left(a^2b + \frac{1}{b}\right).$$

Tương tự
$$b \leq \frac{1}{2}\left(b^2c + \frac{1}{c}\right)$$

$$c \leq \frac{1}{2}\left(c^2a + \frac{1}{a}\right).$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức này ta được điều phải chứng minh.

63. a) $f(x)$ có

$$\Delta = a^2 - 4\left(-3bc + \frac{a^2}{3}\right) = \frac{-a^2}{3} + 12bc = \frac{-a^2}{3} + \frac{12abc}{a} = \frac{-a^2}{3} + \frac{12}{a}$$

$$= \frac{36 - a^3}{3a} < 0 \text{ (do giả thiết } a^3 > 36)$$

$\Rightarrow f(x) > 0,\ \forall x.$

b) $\dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} + (b+c)^2 - 2bc > bc + a(b+c)$

$\Leftrightarrow (b+c)^2 - a(b+c) - 3bc + \dfrac{a^2}{3} > 0$

$\Leftrightarrow f(b+c) > 0$ đúng vì $f(x) > 0,\ \forall x.$

64. Điều kiện của bất phương trình là $x \geq 0$.

Nếu $m \leq 1$ thì $m - 1 \leq 0$, bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x \geq 0$;

Nếu $m > 1$ thì $m - 1 > 0$, bất phương trình đã cho tương đương với

$$\sqrt{x} \le 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Trả lời. Nếu $m \le 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $[0 ; +\infty)$.

Nếu $m > 1$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $\{0\}$.

65. Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là đoạn $[2a - b + 1 ; -a + 2b - 1]$ (nếu $2a - b + 1 \le -a + 2b - 1$) hoặc là đoạn $[-a + 2b - 1 ; 2a - b + 1]$ (nếu $-a + 2b - 1 \le 2a - b - 1$)

Do đó để tập nghiệm của bất phương trình đã cho là đoạn $[0 ; 2]$, điều kiện cần và đủ là

$$(1)\begin{cases} 2a - b + 1 = 2 \\ -a + 2b - 1 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } (2)\begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ -a + 2b - 1 = 2. \end{cases}$$

Giải hệ (1) ta được $a = b = 1$. Giải hệ (2) ta được $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

Đáp số : $a = b = 1$ hoặc $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

66. (1) $\Leftrightarrow x \in [\alpha ; \beta]$, trong đó

$$\begin{cases} \alpha = a - b \\ \beta = -2a + b + 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \alpha = -2a + b + 1 \\ \beta = a - b. \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow -(b + 1) \le x + a - 2 \le b + 1$$

$$\Leftrightarrow -b - a + 1 \le x \le -a + b + 3$$

$$\Leftrightarrow x \in [-b - a + 1 ; -a + b + 3].$$

(1) và (2) tương đương khi và chỉ khi $[\alpha ; \beta] = [-b - a + 1 ; -a + b + 3]$

tức là $\begin{cases} \alpha = -b - a + 1 \\ \beta = -a + b + 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow (3)\begin{cases} a - b = -b - a + 1 \\ -2a + b + 1 = -a + b + 3 \end{cases} \text{ hoặc } (4)\begin{cases} -2a + b + 1 = -b - a + 1 \\ a - b = -a + b + 3 \end{cases}$$

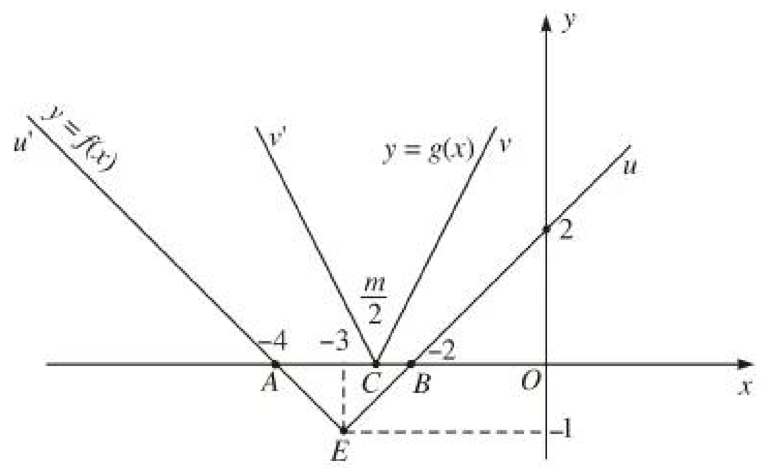
Hệ phương trình (3) vô nghiệm. Hệ phương trình (4) có nghiệm duy nhất $a = 3$, $b = \frac{3}{2}$.

Đáp số : $a = 3$, $b = \frac{3}{2}$.

67. a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường gấp khúc $u'Eu$, cắt Ox tại $A(-4\,;0)$ và $B(-2\,;0)$.

Đồ thị hàm số $y = g(x)$ là đường gấp khúc $v'Cv$, cắt Ox tại $C\left(\frac{m}{2}\,;0\right)$.

Khi m thay đổi, điểm C chạy trên Ox ; tia Cv luôn song song với đường thẳng $y = 2x$; tia Cv' luôn song song với đường thẳng $y = -2x$.



Hình 47

b) Bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x khi và chỉ khi đồ thị của hàm số $y = g(x)$ nằm hoàn toàn phía trên đồ thị của hàm số $y = f(x)$ hay C nằm giữa A và B nghĩa là $-4 < \frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow -8 < m < -4$.

Đáp số : $-8 < m < -4$.