LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ

1. a) Vì đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng cho nên hàm số

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

là hàm số chẵn, do đó

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c = f(-x), \ \forall x$$

suy ra $b = 0$. Ta còn phải xác định a và c.

Vì parabol cắt đường thẳng $y = \frac{x}{2}$ tại các điểm có hoành độ -1 và $\frac{3}{2}$ nên nó đi qua các điểm

$$\left(-1\ ;\ -\frac{1}{2}\right) \text{ và } \left(\frac{3}{2}\ ;\frac{3}{4}\right).$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + c = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{9a}{4} + c = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $a = 1$, $c = -\frac{3}{2}$.

Parabol phải tìm là $y = x^2 - \frac{3}{2}$.

b) Vì parabol đi qua $(0\ ;\ 0)$ nên $y(0) = c = 0$.

Do parabol có đỉnh là $(1\ ;\ 2)$ nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b^2 + 8a = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được $a = -2$, $b = 4$.

Parabol phải tìm là $y = -2x^2 + 4x$.

c) $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 3$.

2. $k_1 = -\frac{22}{3}$; $k_2 = 2$.

3. Ta có $\Delta = (a+1)^2 - 8(a-1) = a^2 + 2a + 1 - 8a + 8$

$= a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2 \geq 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm.

Xét $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = x_1^2x_2^2$

hay $$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a-1}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow -4a + 8 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Đáp số : $a = 2$

4. Cần có $\Delta = k^2 - 20 > 0$.

Xét $x_1 - x_2 = (x_1 + x_2) - 2x_2 = 1 \Rightarrow \frac{k}{5} - 2x_2 = 1$

suy ra $x_2 = \frac{k-5}{10}$; $x_1 = 1 + x_2 = \frac{k+5}{10}$.

Do đó

$$x_1x_2 = \frac{k-5}{10} \cdot \frac{k+5}{10} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow k^2 = 45.$$

Đáp số : $k = \pm 3\sqrt{5}$.

5. $x^2 - 2a(x-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$.

Vì $\Delta' = (a-1)^2 \geq 0$ nên phương trình luôn có nghiệm.

Ta có $x_1 + x_2 = 2a$;

$x_1x_2 = 2a - 1$;

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

Suy ra $4a^2 - 2(2a-1) = 2a \Leftrightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0$.

Giải phương trình trên ta được $a = \frac{1}{2}$; $a = 1$.

Đáp số : $a = \frac{1}{2}$; $a = 1$.

6. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$

$$= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2] = \frac{5}{3}\left[\frac{25}{9} + 2\right] = \frac{215}{27}.$$

7. Ta có $\dfrac{1}{x_1^3} + \dfrac{1}{x_2^3} = \dfrac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3x_2^3} = \dfrac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]}{(x_1x_2)^3}$

$$= -\frac{3a}{2}\left[\frac{9a^2}{4} + 3\right] = -\frac{27a^3 + 36a}{8}.$$

8. Phải có

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ ac > 0 \\ \dfrac{S}{2} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1) > 0 \\ 9a^2 - 2a + 2 > 0 \\ \dfrac{6a}{2} > 3. \end{cases}$$

Giải hệ bất phương trình trên ta được $a > 1$.

9. *Đáp số :* $k = 12$, $k = 13$.

10. a) Phải có

$$\Delta = (a+1)^2 - (a+1)^2a^2 = (a+1)^2(1 - a^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a \leq 1,\ a \neq 0.$$

b) Ta có

$P = (a+1)^2$,

$P = 0 \Leftrightarrow a = -1$, khi đó $x_1 = x_2 = 0$.

$P > 0$, $\forall a \neq -1$, khi đó x_1, x_2 cùng dấu.

Mặt khác

$$S = \frac{2(a+1)}{a}$$

suy ra :

Với $0 < a \leq 1$ thì hai nghiệm của phương trình (E) đều dương ;

Với $-1 \leq a < 0$ thì hai nghiệm của phương trình (E) đều âm.

c) Từ $S = \dfrac{2(a+1)}{a}$ suy ra $a = \dfrac{2}{S-2}$.

Do đó $\quad P = \left(\dfrac{2}{S-2}+1\right)^2 = \dfrac{S^2}{(S-2)^2} \Leftrightarrow (S-2)^2P - S^2 = 0.$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a} \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow 4x_2 = \dfrac{2(a+1)}{a},$

$\begin{cases} x_1x_2 = (a+1)^2 \\ x_1 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow 3x_2^2 = (a+1)^2.$

Suy ra $(a+1)^2(4a^2-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$

Với $a = -1$ ta có $x_1 = x_2 = 0$;

Với $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x_2 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{6}$; $x_1 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$;

Với $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ta có $x_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{6}$; $x_1 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}$.

11. a) Với $a \neq \pm 1$ hệ phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{1-2a^2}{1-a^2}$; $y = \dfrac{a}{1-a^2}$;

Với $a = \pm 1$ hệ phương trình (1) vô nghiệm.

b) Nếu $a \neq \pm 1$ thì $x = 0$; $y = a$;

Nếu $a = -1$ thì $x = t + 1$, $y = t$ $(t \in \mathbb{R})$;

Nếu $a = 1$ thì $x = t$, $y = 1 - t$ $(t \in \mathbb{R})$.

12. a) Hệ phương trình (3) tương đương với

$\begin{cases} (m^2 - m - 56)y = -m - 7 \\ 2x + (m+1)y = -1. \end{cases}$ Từ đó nếu $m^2 - m - 56 \neq 0$ thì hệ có nghiệm.

Ta xét $m^2 - m - 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -7 \\ m = 8. \end{array}\right.$

Với $m = -7$ hệ phương trình (3) trở thành $\begin{cases} -9x + 27y = 4,5 \\ 2x - 6y = -1. \end{cases}$ (3a)

Vì $-\frac{9}{2} = \frac{27}{-6} = \frac{4,5}{-1}$ nên hệ phương trình (3a) có vô số nghiệm.

Với $m = 8$ ta có hệ $\begin{cases} 6x + 27y = 4,5 \\ 2x + 9y = -1. \end{cases}$ (3b)

Vì $\frac{6}{2} = \frac{27}{9} \neq \frac{4,5}{-1}$ cho nên hệ phương trình (3b) vô nghiệm.

Trả lời : $m = -7$.

b) Hệ phương trình (4) tương đương với $\begin{cases} (9 - m^2)x = 9 - 3m \\ mx + 3y \quad = 3. \end{cases}$

Tương tự câu a) ta xét trường hợp $9 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3$

Với $m = 3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 3x + 3y = 3. \end{cases}$ (4a)

Rõ ràng hệ phương trình (4a) có vô số nghiệm.

Với $m = -3$ hệ phương trình (4) trở thành

$$\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ -3x + 3y = 3. \end{cases} \quad (4b)$$

Vì $\frac{3}{-3} = \frac{-3}{3} \neq \frac{3}{3}$ cho nên hệ phương trình (4b) vô nghiệm.

Trả lời : $m = 3$.

13. a) $\begin{cases} x + y + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 5 \\ (x + y)^2 + (x + y) = 12. \end{cases}$

Đặt $u = x + y$ ta được $u^2 + u - 12 = 0$.

Giải ra ta được $u_1 = 3$, $u_2 = -4$.

Với $u = 3$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2. \end{cases}$ (*)

Giải hệ phương trình (*) ta được hai nghiệm (1 ; 2) và (2 ; 1).

Với $u = -4$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 9 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Đáp số : (1 ; 2) và (2 ; 1).

b) Đặt $\begin{cases} u = x + y \\ v = \sqrt{xy} \end{cases}$ $(v \geq 0)$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13 \\ u - v = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u - v = 3 \\ u^2 - 9u + 20 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta được

$$u = 5, v = 2$$
$$\text{hoặc } u = 4, v = 1.$$

Vậy

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ \sqrt{xy} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \text{ và } \begin{cases} x + y = 4 \\ \sqrt{xy} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \\ y = 2 + \sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Đáp số : Hệ phương trình đã cho có bốn nghiệm là

$(4 ; 1)$; $(1 ; 4)$; $(2 - \sqrt{3} ; 2 + \sqrt{3})$; $(2 + \sqrt{3} ; 2 - \sqrt{3})$.

14. a) $\{(-7 ; -3), (7 ; 3)\}$;

b) $\{(-3 ; 4), (4 ; -3)\}$.

15. a) $\left[1 ; \dfrac{4}{3}\right]$; b) $(-\infty ; +\infty)$.

c) $\left(-\infty ; \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5 + \sqrt{3}}{2} ; +\infty\right)$.

d) $\left(-\infty\ ;\ \dfrac{-5-\sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{19}}{3}\ ;\ +\infty\right)$.

e) $(-\infty\ ;\ -4) \cup (-3\ ;\ 3) \cup (6\ ;\ +\infty)$.

g) $(-\infty\ ;\ -5) \cup (1\ ;\ 2) \cup (6\ ;\ +\infty)$.

16. Giả sử các đỉnh của tam giác có toạ độ lần lượt là

$$A(x_1\ ;\ y_1),\ B(x_2\ ;\ y_2),\ C(x_3\ ;\ y_3).$$

Theo công thức toạ độ trung điểm ta có

$$\text{(I)}\ \begin{cases} x_2 + x_3 = 2x_M = 2 \\ x_3 + x_1 = 2x_N = 6 \\ x_1 + x_2 = 2x_P = 10 \end{cases} \quad \text{và} \quad \text{(II)}\ \begin{cases} y_2 + y_3 = 2y_M = 4 \\ y_3 + y_1 = 2y_N = -10 \\ y_1 + y_2 = 2y_P = 14. \end{cases}$$

Cộng từng vế các phương trình của hệ (I) ta được

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 18 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 9,$$

từ đó $\qquad x_1 = 7\ ;\ x_2 = 3\ ;\ x_3 = -1.$

Tương tự tìm được $y_1 = 0\ ;\ y_2 = 14\ ;\ y_3 = -10$.

Vậy $A(7\ ;\ 0)\ ;\ B(3\ ;\ 14)\ ;\ C(-1\ ;\ -10)$.

17. Giả sử $M(x\ ;\ y)$ là đỉnh của hình vuông $AMBN$.

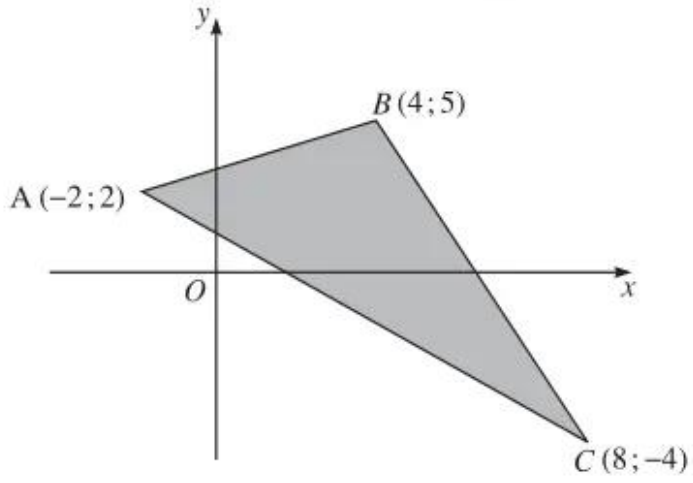
Ta có $\begin{cases} |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| \\ \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AM^2 = BM^2 \\ \overrightarrow{AM}\ .\ \overrightarrow{BM} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 \\ (x-1)(x-3) + (y-1)(y-5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 8 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 0 \\ y = 4. \end{cases}$$

Vậy $M(4\ ;\ 2)$, $N(0\ ;\ 4)$ hoặc $M(0\ ;\ 4)$, $N(4\ ;\ 2)$.

18. (h. 65) Tập nghiệm là miền tam giác *ABC* (kể cả biên).



Hình 65

19. a) *Thời gian giải xong một bài tập toán của 44 học sinh lớp 10A, trường Trung học phổ thông K*

Lớp thời gian (phút)	Tần số	Tần suất (%)
[19,5 ; 20,5)	5	11,36
[20,5 ; 21,5)	7	15,91
[21,5 ; 22,5)	10	22,73
[22,5 ; 23,5)	12	27,27
[23,5 ; 24,5)	6	13,64
[24,5 ; 25,5]	4	9,09
Cộng	44	100 (%)

b) *Nhận xét*

Trong 44 học sinh đã được khảo sát ta thấy :

Chiếm tỉ lệ thấp nhất (9,09%) là những học sinh có thời gian giải xong một bài tập toán từ 24,5 phút đến 25,5 phút.

Chiếm tỉ lệ cao nhất (27,27%) là những học sinh có thời gian giải xong bài tập toán đó từ 22,5 phút đến dưới 23,5 phút.

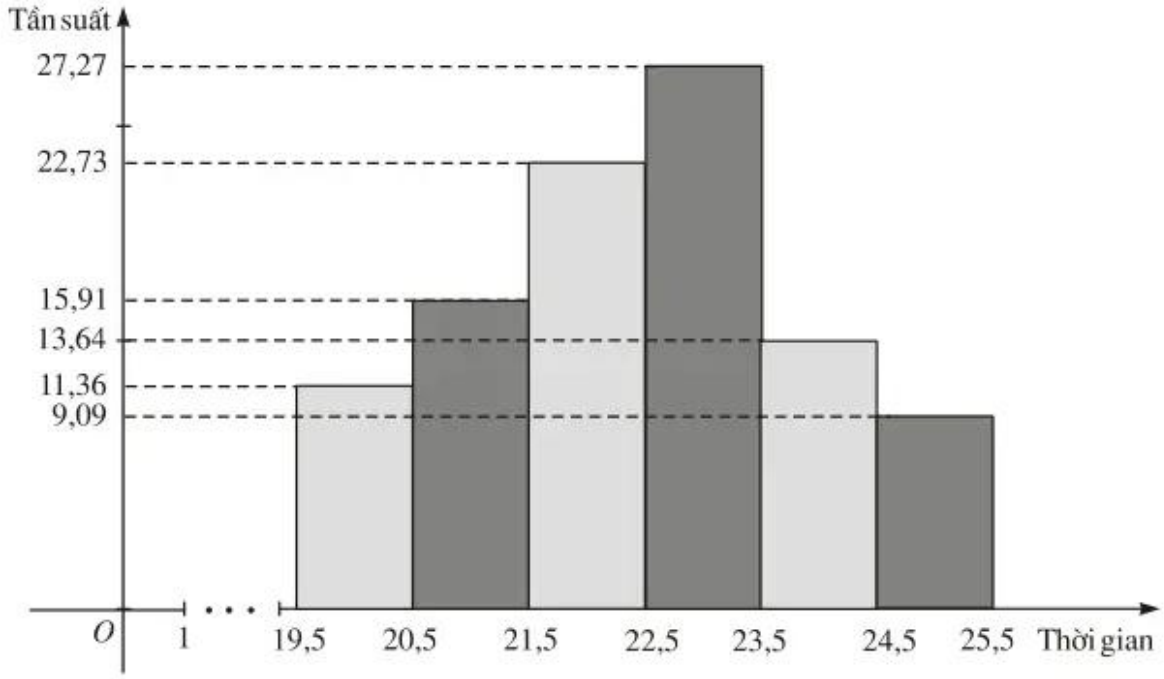
Đa số (79,55%) là những học sinh có thời gian giải xong bài tập toán đó từ 20,5 phút đến dưới 24,5 phút.

c) Sử dụng bảng phân bố tần số ghép lớp đã lập, ta tính được $\overline{x} = 22{,}4$ phút, $s_x^2 = 2{,}1$, $s_x = 1{,}4$ phút.

d) Ta có $\overline{x} \approx \overline{z} = 22{,}4$ phút > 20 phút = $\overline{y}$ do đó ta có thời gian giải xong bài tập toán đó của học sinh ở lớp 10A và 10C là như nhau và cùng chậm hơn học sinh lớp 10B.

Đồng thời, vì $\overline{x} \approx \overline{z} = 22{,}4$ phút và $s_x^2 = 2{,}1 > 1 = s_z^2$ nên thời gian giải xong bài tập toán đó của các học sinh lớp 10C là đồng đều hơn các học sinh lớp 10A.

e) *Biểu đồ tần suất hình cột về thời gian (phút) giải xong một bài tập toán của 44 học sinh lớp 10A, trường Trung học phổ thông K* (h. 66).



Hình 66

20. a) Vì $\sqrt{1+\cos\alpha} = -\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ (do $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \pi$)

$\sqrt{1-\cos\alpha} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$ cho nên

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}} = \frac{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{-\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \cot\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right).$$

b) $$\frac{\cos 4a\tan 2a - \sin 4a}{\cos 4a\cot 2a + \sin 4a} = \frac{\cos 4a\sin 2a - \sin 4a\cos 2a}{\cos 4a\cos 2a + \sin 4a\sin 2a}.\tan 2a$$

$$= \frac{-\sin 2a}{\cos 2a}\tan 2a = -\tan^2 2a.$$

c) $$\frac{\sin^2 2a + 4\sin^2 a - 4}{1-8\sin^2 a - \cos 4a} = \frac{4\sin^2 a\cos^2 a + 4(\sin^2 a - 1)}{1-8\sin^2 a - (1-2\sin^2 2a)}$$

$$= \frac{4\cos^2 a(\sin^2 a - 1)}{8\sin^2 a(\cos^2 a - 1)} = \frac{1}{2}\cot^4 a.$$

d) $$\frac{\sin 10,5a}{\sin 3,5a} = \frac{\sin(7a+3,5a)}{\sin 3,5a} = \frac{\sin 7a\cos 3,5a + \cos 7a\sin 3,5a}{\sin 3,5a}$$

$$= \frac{\sin 3,5a(2\cos^2 3,5a + \cos 7a)}{\sin 3,5a}$$

$$= (2\cos^2 3,5a - 1) + 1 + \cos 7a$$

$$= 2\cos 7a + 1.$$

e) $\dfrac{\tan(a+2a)}{\tan a} = \dfrac{\tan a + \tan 2a}{\tan a(1 - \tan a \tan 2a)} = \dfrac{\tan a + \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}}{\tan a\left(1 - \dfrac{2\tan^2 a}{1-\tan^2 a}\right)}$

$$= \frac{3 - \tan^2 a}{1 - 3\tan^2 a}.$$

21. a) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha} = \dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - \sin^2 2\alpha}{4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$$= \frac{4\sin^4\alpha}{4\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)} = \tan^4\alpha.$$

b) $3 - 4\cos 2a + \cos 4a = 3 - 4(1 - 2\sin^2 a) + (1 - 2\sin^2 2a)$

$$= 8\sin^2 a - 8\sin^2 a\cos^2 a = 8\sin^2 a\,(1 - \cos^2 a)$$

$$= 8\sin^4 a.$$

c) $\cos 4a - \sin 4a \cot 2a = 2\cos^2 2a - 1 - 2\sin 2a\cos 2a\dfrac{\cos 2a}{\sin 2a} = -1.$

d) $\dfrac{\cot a + \tan a}{1 + \tan 2a \tan a} = \dfrac{\dfrac{\cos a}{\sin a} + \dfrac{\sin a}{\cos a}}{1 + \dfrac{\sin 2a \sin a}{\cos 2a \cos a}}$

$$= \frac{1}{\sin a\cos a}\cdot\frac{\cos a\cos 2a}{\cos 2a\cos a + \sin 2a\sin a}$$

$$= \frac{2}{\sin 2a}\cdot\frac{\cos a\cos 2a}{\cos(2a-a)} = 2\cot 2a.$$

22. a) $\cos 67^\circ 30' = \cos\dfrac{135^\circ}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos 135^\circ}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$$

b) $\cot 30^o = \dfrac{1}{\tan 2.15^o} = \dfrac{1-\tan^2 15^o}{2\tan 15^o} = \dfrac{\cot^2 15^o - 1}{2\cot 15^o}$.

Đặt $x = \cot 15^o$ và chú ý rằng $\cot 30^o = \sqrt{3}$ ta có

$$\sqrt{3} = \frac{x^2-1}{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0.$$

Giải phương trình trên ta được $x = 2+\sqrt{3}$ (nghiệm $x = \sqrt{3}-2$ loại vì $\cot 15^o > 0$). Do đó

$$\frac{\cot 15^o + 1}{2\cot 15^o} = \frac{2+\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{3+\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

c) Ta có

$$\begin{aligned}\tan 20^o \tan 40^o \tan 80^o &= -\tan 20^o \tan 40^o \tan 100^o \\ &= -\tan(60^o - 40^o)\tan 40^o \tan(60^o + 40^o) \\ &= -\frac{\tan 60^o - \tan 40^o}{1+\tan 60^o \tan 40^o}\tan 40^o \frac{\tan 60^o + \tan 40^o}{1-\tan 60^o \tan 40^o} \\ &= -\frac{3-\tan^2 40^o}{1-3\tan^2 40^o}\tan 40^o = -\tan 120^o = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

(Áp dụng bài tập ôn tập cuối năm 20 e) ta có $\dfrac{\tan 120^o}{\tan 40^o} = \dfrac{3-\tan^2 40^o}{1-3\tan^2 40^o}$).

d) *Hướng dẫn*. Nhân thêm $\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Đáp số : $\dfrac{1}{8}$.

23. a) $\dfrac{1-\cos 2a + \sin 2a}{1+\cos 2a + \sin 2a} = \dfrac{2\sin^2 a + 2\sin a\cos a}{1+2\cos^2 a - 1 + 2\sin a\cos a}$

$$= \frac{2\sin a(\sin a + \cos a)}{2\cos a(\sin a + \cos a)} = \tan a.$$

b) $$\frac{\cot a + \tan a}{1 + \tan 2a \tan a} = \frac{\dfrac{1}{\tan a} + \tan a}{1 + \dfrac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}\tan a}$$

$$= \frac{1 + \tan^2 a}{\tan a} : \frac{1 - \tan^2 a + 2\tan^2 a}{1 - \tan^2 a}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 a}{\tan a} = 2\cot 2a.$$

c) $$\frac{\sqrt{2} - \sin a - \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{1 - \sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sin\dfrac{\pi}{2} - \sin\left(a + \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right)}$$

$$= \frac{2\cos\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{3\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{a}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)} = \frac{\sin\left(-\dfrac{a}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{a}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)}$$

$$= \frac{-\sin\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right)} = -\tan\left(\frac{a}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$$

d) $\cos 2a - \cos 3a - \cos 4a + \cos 5a = (\cos 2a - \cos 4a) + (\cos 5a - \cos 3a)$

$= -2\sin 3a \sin(-a) - 2\sin 4a \sin a = 2\sin a(\sin 3a - \sin 4a)$

$= 4\sin a \cos\dfrac{7a}{2} \sin\left(-\dfrac{a}{2}\right) = -4 \sin\dfrac{a}{2} \sin a \cos\dfrac{7a}{2}.$

24. a) $$\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}\tan^2\frac{a}{2} - \cos^2 a = \frac{2\cos^2\dfrac{a}{2}}{2\sin^2\dfrac{a}{2}}\tan^2\frac{a}{2} - \cos^2 a = \sin^2 a.$$

b) $4\cos^4 a - 2\cos 2a - \frac{1}{2}\cos 4a$

$$= 4\cos^4 a - 2(2\cos^2 a - 1) - \frac{1}{2}(2\cos^2 2a - 1)$$

$$= 4\cos^4 a - 4\cos^2 a + 2 - (2\cos^2 a - 1)^2 + \frac{1}{2}$$

$$= 4\cos^4 a - 4\cos^2 a + \frac{5}{2} - 4\cos^4 a + 4\cos^2 a - 1 = \frac{3}{2}.$$

c) $\sin^2 a(1 + \frac{1}{\sin a} + \cot a)(1 - \frac{1}{\sin a} + \cot a)$

$$= \sin^2 a\left[\left(1 + \cot a\right)^2 - \frac{1}{\sin^2 a}\right] = \sin^2 a(1 + \cot^2 a + 2\cot a) - 1$$

$$= \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin^2 a\frac{\cos a}{\sin a} - 1 = \sin 2a.$$

d) $\frac{\cos 2a}{\cos^4 a - \sin^4 a} - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a}$

$$= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{(\cos^2 a + \sin^2 a)(\cos^2 a - \sin^2 a)} - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{1 - \frac{1}{2}(2\sin a\cos a)^2}$$

$$= 1 - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{\sin^2 a - \sin^2 a\cos^2 a + \cos^2 a - \sin^2 a\cos^2 a}$$

$$= 1 - \frac{\cos^4 a + \sin^4 a}{\sin^2 a(1 - \cos^2 a) + \cos^2 a(1 - \sin^2 a)} = 0.$$