Chương V. ĐẠO HÀM

§1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\,;b)$, $x_0 \in (a\,;b)$, $x_0 + \Delta x \in (a\,;b)$.

Nếu tồn tại, giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

được gọi là *đạo hàm* của $f(x)$ tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

2. Quy tắc tính đạo hàm bằng định nghĩa

Bước 1 : Với Δx là số gia của đối số tại x_0, tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\,;$$

Bước 2 : Lập tỉ số $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$;

Bước 3 : Tính $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

➢ **Chú ý :** Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay x_0 bởi x ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x \in (a\,;b)$.

3. Quan hệ giữa tính liên tục và sự có đạo hàm

$f(x)$ có đạo hàm tại x_0	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	$f(x)$ liên tục tại x_0

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Nếu tồn tại, $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $M_0\ (x_0\,;f(x_0))$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M_0 là

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)\ (x - x_0).}$$

5. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

$v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

> Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{2x-1}$ tại $x_0 = 5$.

Giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \left\{x \mid x \geq \dfrac{1}{2}\right\}$.

• Với Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 5$ sao cho $5 + \Delta x \in D$, thì

$$\Delta y = \sqrt{2(5+\Delta x) - 1} - \sqrt{10-1}.$$

• Ta có

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{9+2\Delta x} - \sqrt{9}}{\Delta x}.$$

• Khi đó

$$y'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{9+2\Delta x} - 3)(\sqrt{9+2\Delta x} + 3)}{\Delta x(\sqrt{9+2\Delta x} + 3)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9 + 2\Delta x - 9}{\Delta x(\sqrt{9 + 2\Delta x} + 3)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{9 + 2\Delta x} + 3} = \frac{1}{3}.$$

• ***Ví dụ 2***

Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + x}{x - 2}. \qquad (\mathscr{C})$$

a) Hãy tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của hàm số đã cho tại $x = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại điểm $A(1\ ;\ -2)$.

Giải

a) Với Δx là số gia của đối số tại $x = 1$, ta có

$$\Delta y = \frac{(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)}{1 + \Delta x - 2} - \frac{1 + 1}{1 - 2}$$

$$= \frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 + 1 + \Delta x}{\Delta x - 1} + 2$$

$$= \frac{2 + 3\Delta x + \Delta x^2 + 2\Delta x - 2}{\Delta x - 1} = \frac{5\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x - 1}\ ;$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 + \Delta x}{\Delta x - 1}\ ;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5 + \Delta x}{\Delta x - 1} = -5.$$

Vậy $\qquad y'(1) = -5.$

b) Phương trình tiếp tuyến của $(\mathscr{C})$ tại $A(1\ ;\ -2)$ là

$$y + 2 = -5(x - 1)$$

hay $\qquad y = -5x + 3.$

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ (x+1)^2, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại đó.

Giải

a) Ta có $f(0) = 1$.

Trước hết, ta tính giới hạn bên phải của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{(x-1)^2 - 1}{x} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{x} \\ &= x - 2 \text{ (với } x \neq 0),\end{aligned}$$

do đó

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2.$$

Sau đó ta tính giới hạn bên trái :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{(x+1)^2 - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2.\end{aligned}$$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của tỉ số $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ khi $x \to 0$. Điều đó chứng tỏ hàm số $y = f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

b) Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x-1)^2 = 1,$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1)^2 = 1$

và $f(0) = 1$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

• ***Ví dụ 4***

Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{nếu } x \ge 0 \\ -\sin x, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

không có đạo hàm tại $x = 0$.

Giải

a) Vì $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1,$

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-\sin x) = 0,$

$g(0) = \cos 0 = 1$

nên hàm số $y = g(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Do đó hàm số này không có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

C. BÀI TẬP

1.1. Sử dụng định nghĩa, hãy tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = 3x - 5$;

b) $y = 4x^2 - 0{,}6x + 7$;

c) $y = 4x - x^2$;

d) $y = \sqrt{3x + 1}$;

e) $y = \dfrac{1}{x - 2}$;

f) $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

1.2. Cho $f(x) = 3x^2 - 4x + 9$. Tính $f'(1)$.

1.3. Cho $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

1.4. Cho $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Tính $f'(0), f'(1)$.

1.5. Cho $\varphi(x) = \dfrac{8}{x}$. Chứng minh rằng $\varphi'(-2) = \varphi'(2)$.

1.6. Chứng minh rằng hàm số $y = |x - 1|$ không có đạo hàm tại $x = 1$, nhưng liên tục tại điểm đó.

1.7. Chứng minh rằng hàm số

$$y = \operatorname{sign}x = \begin{cases} 1, \text{ nếu } x > 0 \\ 0, \text{ nếu } x = 0 \\ -1, \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

không có đạo hàm tại $x = 0$.

1.8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số

a) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$;

b) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $(-1 ; -2)$;

c) $y = \sqrt{2x + 1}$, biết hệ số góc của tiếp tuyến là $\dfrac{1}{3}$.

d) $y = x^4 - 2x^2$ tại điểm có hoành độ $x = -2$;

(Đề thi tốt nghiệp THPT 2008)

e) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng -5.

(Đề thi tốt nghiệp THPT 2009)