LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG IV

§1.

1.1. Vì (u_n) có giới hạn là 0 nên $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, $|v_n| = ||u_n|| = |u_n|$. Do đó, $|v_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Vậy, (v_n) có giới hạn là 0.

(Chứng minh tương tự, ta có chiều ngược lại cũng đúng).

1.2. Vì $|u_n| = |(-1)^n| = 1$, nên $|u_n|$ không thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Chẳng hạn, $|u_n|$ không thể nhỏ hơn 0,5 với mọi n.

Do đó, dãy số (u_n) không thể có giới hạn là 0.

1.3. Dãy $(u_n + v_n)$ không có giới hạn hữu hạn.

Thật vậy, giả sử ngược lại, $(u_n + v_n)$ có giới hạn hữu hạn.

Khi đó, các dãy số $(u_n + v_n)$ và (u_n) cùng có giới hạn hữu hạn, nên hiệu của chúng cũng là một dãy có giới hạn hữu hạn, nghĩa là dãy số có số hạng tổng quát là $u_n + v_n - u_n = v_n$ có giới hạn hữu hạn. Điều này trái với giả thiết (v_n) không có giới hạn hữu hạn.

1.4. a) Vì $\lim u_n = -\infty$ nên $\lim(-u_n) = +\infty$. Do đó, $(-u_n)$ có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, vì $v_n \leq u_n$ với mọi n nên $(-v_n) \geq (-u_n)$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(-v_n)$ có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Do đó, $\lim(-v_n) = +\infty$ hay $\lim v_n = -\infty$.

b) Xét dãy số $(u_n) = -n$.

Ta có $-n! < -n$ hay $v_n < u_n$ với mọi n. Mặt khác $\lim u_n = \lim(-n) = -\infty$.

Từ kết quả câu a) suy ra $\lim v_n = \lim(-n!) = -\infty$.

1.5. a) -3 ; b) $+\infty$; c) 0 ; d) $\dfrac{27}{4}$;

e) $\lim\left(2^n + \dfrac{1}{n}\right) = \lim 2^n\left(1 + \dfrac{1}{n}.\dfrac{1}{2^n}\right) = +\infty$;

f) 0 ; g) $-\dfrac{1}{2}$; h) -1.

1.6. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) $+\infty$; d) $-\dfrac{3}{2}$.

1.7. $\lim v_n = 0 \Rightarrow |v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Vì $|u_n| \le v_n$ và $v_n \le |v_n|$ với mọi n, nên $|u_n| \le |v_n|$ với mọi n. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ cũng có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

1.8. $\lim u_n = 2$.

1.9. a) Vì $\left|\dfrac{1}{n!}\right| < \dfrac{1}{n}$ với mọi n và $\lim\dfrac{1}{n} = 0$ nên $\lim\dfrac{1}{n!} = 0$.

b) 0 ; c) 0 ; d) 0 ;

e) Ta có $u_n = 5^n - \cos\sqrt{n}\pi = 5^n\left(1 - \dfrac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right)$. (1)

Vì $\left|\dfrac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right| \le \dfrac{1}{5^n}$ và $\lim\dfrac{1}{5^n} = 0$ nên $\lim\dfrac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n} = 0$.

Do đó, $\lim\left(1 - \dfrac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right) = 1 > 0$. (2)

Mặt khác, $\lim 5^n = +\infty$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim(5^n - \cos\sqrt{n}\pi) = \lim 5^n\left(1 - \dfrac{\cos\sqrt{n}\pi}{5^n}\right) = +\infty$.

1.10. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Ta có, $u_1 = 2$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{5}{4}$, $u_4 = \dfrac{9}{8}$, $u_5 = \dfrac{17}{16}$.

Dự đoán, $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp (bạn đọc tự chứng minh).

Từ đó, $\lim u_n = \lim \dfrac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}} = \lim\left[1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \lim\left[1 + 2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right] = 1.$

1.11. $\dfrac{2}{3}$.

1.12. 10.

1.13. $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

1.14. Dãy số : $\sin\alpha, \sin^2\alpha, ..., \sin^n\alpha, ...$ với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, là một cấp số nhân vô hạn, công bội $q = \sin\alpha$.

Vì $|\sin\alpha| < 1$ với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ nên $(\sin^n\alpha)$ là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Hơn nữa, $b_n = \sin\alpha + \sin^2\alpha + ... + \sin^n\alpha = S_n$.

Do đó, $\lim b_n = \sin\alpha + \sin^2\alpha + ... + \sin^n\alpha + ... = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$.

1.15. Giải tương tự Ví dụ 13, ta có $a = 34{,}121212... = \dfrac{1126}{33}$.

1.16. a) Chứng minh bằng quy nạp $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. (1)

– Với $n = 1$, một hình vuông được tạo thành có diện tích là $u_1 = \dfrac{1}{2^2}$.

Vậy (1) đúng.

– Giả sử công thức (1) đúng với $n = k$ $(k \geq 1)$, nghĩa là $u_k = \dfrac{1}{2^{k+1}}$. Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh $u_{k+1} = \dfrac{1}{2^{k+2}}$.

Thật vậy, ở bước thứ k ta có 2^{k-1} hình vuông mới màu xám được tạo thành. Ứng với mỗi hình vuông này ta lại tạo được hai hình vuông mới trong bước thứ $k + 1$.

Tổng diện tích của hai hình vuông mới này trong bước thứ $k + 1$ bằng nửa diện tích của hình vuông tương ứng trong bước thứ k.

Do đó, tổng diện tích tất cả các hình vuông mới có được trong bước thứ $k + 1$ là $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2^{k+1}} = \dfrac{1}{2^{k+2}}$. Vậy (1) đúng với $n = k + 1$.

– *Kết luận :* Với mọi n nguyên dương ta luôn có $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

b) *Dự đoán :* $S_n \to \dfrac{1}{2} S_{ABC}$ khi $n \to +\infty$, hay $\lim S_n = \dfrac{1}{2}$.

Chứng minh : $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + ... + \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Từ đó, $\lim S_n = \dfrac{1}{2}$.