Chương IV. GIỚI HẠN

§1. Giới hạn của dãy số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ khi và chỉ khi $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - a) = 0$.

2. Giới hạn vô cực

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ khi và chỉ khi u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$.

➢ **Lưu ý :** Thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$, ta viết tắt $\lim u_n = a$, $\lim u_n = \pm\infty$.

3. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$; $\lim n^k = +\infty$, với k nguyên dương.

b) $\lim q^n = 0$ nếu $|q| < 1$; $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

c) $\lim c = c$ (c là hằng số).

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$, thì :

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$;
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$;
- $\lim u_n v_n = ab$;
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n và $\lim u_n = a$, thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

5. Định lí liên hệ giữa giới hạn hữu hạn và giới hạn vô cực

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$.

6. Cấp số nhân lùi vô hạn

- *Cấp số nhân lùi vô hạn* là cấp số nhân vô hạn có công bội q thoả mãn $|q| < 1$.
- Công thức tính tổng S của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n)

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}.$$

B. VÍ DỤ

- ***Ví dụ 1***

Cho dãy số (u_n) với $\lim u_n = 1$. Chứng minh rằng, kể từ số hạng nào đó trở đi, tất cả các số hạng của (u_n) đều nằm trong khoảng :

a) (0,9 ; 1,1) ; b) (0,99 ; 1,01).

Giải

$\lim u_n = 1 \Leftrightarrow \lim(u_n - 1) = 0$. Do đó, $|u_n - 1|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

a) Lấy số dương này là 0,1 (bằng $\frac{1,1 - 0,9}{2}$), ta có :

$|u_n - 1| < 0,1 \Leftrightarrow -0,1 < u_n - 1 < 0,1 \Leftrightarrow 0,9 < u_n < 1,1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nói cách khác, tất cả các số hạng của dãy (u_n), kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nằm trong khoảng (0,9 ; 1,1).

b) Lấy số dương này là 0,01 (bằng $\frac{1,01 - 0,99}{2}$), ta có :

$|u_n - 1| < 0,01 \Leftrightarrow -0,01 < u_n - 1 < 0,01 \Leftrightarrow 0,99 < u_n < 1,01$ kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nói cách khác, tất cả các số hạng của dãy (u_n), kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nằm trong khoảng (0,99 ; 1,01).

• ***Ví dụ 2***

Biết dãy số (u_n) thoả mãn $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2}$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = 0$.

Giải

Đặt $v_n = \frac{n+1}{n^2}$. Ta có $\lim v_n = \lim \frac{n+1}{n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1} = 0$. Do đó, $|v_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi. (1)

Mặt khác, theo giả thiết ta có $|u_n| \leq v_n \leq |v_n|$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý kể từ một số hạng nào đó trở đi, nghĩa là $\lim u_n = 0$.

• ***Ví dụ 3***

Cho biết dãy số (u_n) thoả mãn $u_n > n^2$ với mọi n. Chứng minh rằng $\lim u_n = +\infty$.

Giải

Vì $\lim n^2 = +\infty$ (giới hạn đặc biệt), nên n^2 có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Mặt khác, theo giả thiết $u_n > n^2$ với mọi n, nên u_n cũng có thể lớn hơn một số dương lớn tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Vậy $\lim u_n = +\infty$.

➢ **Nhận xét :** Trong các ví dụ trên, ta đã vận dụng trực tiếp các định nghĩa về giới hạn của dãy số.

• ***Ví dụ 4***

Tính $\lim \dfrac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}$.

Giải

Ta có $\lim \dfrac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2} = \lim \dfrac{4 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n^2} + 2} = 2.$

• ***Ví dụ 5***

Tính $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{1 - 2n^2}$.

Giải

$$\lim \frac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{1 - 2n^2} = \lim \frac{n\sqrt{3 + \dfrac{1}{n^2}} + n}{1 - 2n^2} = \lim \frac{\dfrac{1}{n}\sqrt{3 + \dfrac{1}{n^2}} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2} - 2} = 0.$$

• ***Ví dụ 6***

Tính $\lim \left(n^2 - \dfrac{2}{n + 1}\right)$.

Giải

$$\lim \left(n^2 - \frac{2}{n + 1}\right) = \lim \frac{n^3 + n^2 - 2}{n + 1} = \lim \frac{1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^3}}{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}} = +\infty.$$

• ***Ví dụ 7***

Tính $\lim(-n^2 + n\sqrt{n} + 1)$.

Giải

$$\lim(-n^2 + n\sqrt{n} + 1) = \lim(-n^2)\left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n^2}\right) = -\infty.$$

• ***Ví dụ 8***

Tính $\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right)$.

Giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right) = \lim\frac{\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right)\left(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}\right)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

$$= \lim\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}} = \lim\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$

➢ **Lưu ý :** Khi giải bài toán ở Ví dụ 7, ta đã biến đổi về dạng có thể áp dụng hai tính chất sau :

• $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$. (1)

• Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n v_n = +\infty$. (2)

Tuy nhiên, những biến đổi trên không còn thích hợp với Ví dụ 8. Quả thực, nếu làm tương tự như vậy ta sẽ có :

$$\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right) = \lim\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \lim n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right).$$

Vì $\lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) = 0$, nên không thể áp dụng tính chất (2) ở trên.

➢ **Nhận xét :** Để tìm giới hạn của một dãy số ta thường đưa về các giới hạn dạng đặc biệt và áp dụng các định lí về giới hạn hữu hạn hoặc các định lí về giới hạn vô cực.

Để có thể áp dụng được các định lí nói trên, thông thường ta phải thực hiện một vài biến đổi biểu thức xác định dãy số đã cho. Sau đây là vài gợi ý biến đổi, có thể vận dụng tuỳ theo từng trường hợp :

– Nếu biểu thức có dạng phân thức mà mẫu và tử đều chứa các luỹ thừa của n, thì chia tử và mẫu cho n^k, với k là số mũ cao nhất.

– Nếu biểu thức đã cho có chứa n dưới dấu căn, thì có thể nhân tử số và mẫu số với cùng một biểu thức liên hợp.

• ***Ví dụ 9***

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$ với $n \geq 1$.

Biết (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$, hãy tìm giới hạn đó.

Giải

Đặt $\lim u_n = a$. Ta có

$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n}$

$\Rightarrow a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ hoặc $a = 2$.

Vì $u_n > 0$ nên $\lim u_n = a \geq 0$. Vậy $\lim u_n = 2$.

Lưu ý : Trong lời giải trên, ta đã áp dụng tính chất sau đây.

"Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_{n+1} = a$".

Bạn đọc có thể chứng minh tính chất này bằng định nghĩa.

• ***Ví dụ 10***

Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases} \text{ với } n \geq 1.$$

Dãy số (u_n) có giới hạn hay không khi $n \to +\infty$?
Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

Giải

Ta có $u_1 = \frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{2}{3}$; $u_3 = \frac{3}{4}$; $u_4 = \frac{4}{5}$. Từ đó dự đoán $u_n = \frac{n}{n+1}$. (1)

Chứng minh dự đoán trên bằng quy nạp :

– Với $n = 1$, ta có $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ (đúng).

– Giả sử đẳng thức (1) đúng với $n = k$ ($k \geq 1$), nghĩa là $u_k = \frac{k}{k+1}$.

Khi đó ta có $u_{k+1} = \frac{1}{2 - u_k} = \frac{1}{2 - \frac{k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}$, nghĩa là đẳng thức (1) cũng đúng với $n = k + 1$.

– Vậy $u_n = \frac{n}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Từ đó ta có $\lim u_n = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$.

➢ **Nhận xét :** Để tìm giới hạn của dãy số cho bằng công thức truy hồi ta có thể tìm công thức tổng quát, cho phép tính u_n theo n, bằng cách dự đoán công thức này, và chứng minh dự đoán bằng quy nạp. Sau đó, tìm giới hạn của (u_n) qua công thức tổng quát.

• ***Ví dụ 11***

Tính tổng $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - ...$

Giải

Dãy số vô hạn $2, -\sqrt{2}, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, ...$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì $|q| = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ nên dãy số này là một cấp số nhân lùi vô hạn.

Do đó, $S = 2 - \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - ... = \frac{2}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$.

• ***Ví dụ 12***

Tìm dạng khai triển của cấp số nhân lùi vô hạn (v_n), biết tổng của nó bằng 32 và $v_2 = 8$.

Giải

Từ giả thiết suy ra $\frac{v_1}{1 - q} = 32$. Mặt khác, $v_2 = v_1 q = 8 \Rightarrow v_1 = \frac{8}{q}$.

Thế vào đẳng thức trên ta có : $\frac{8}{q(1 - q)} = 32 \Leftrightarrow 4q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{2}$.

Từ đó $v_n = v_2 q^{n-2} = 8.\frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{2^{n-5}}$.

Vậy dạng khai triển của (v_n) là : $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2^{n-5}}, ...$

• ***Ví dụ 13***

Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số hữu tỉ :

$a = 2{,}131313...$ (chu kì 13).

Giải

$$a = 2{,}131313... = 2 + \frac{13}{100} + \frac{13}{100^2} + ... + \frac{13}{100^n} + ... = 2 + \frac{\frac{13}{100}}{1 - \frac{1}{100}}$$

$$= 2 + \frac{13}{99} = \frac{211}{99}.$$

(Vì $\frac{13}{100}, \frac{13}{100^2}, ..., \frac{13}{100^n}, ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn, công bội $q = \frac{1}{100}$).

➢ **Nhận xét :** – *Cách tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn :* Nhận dạng xem dãy số đã cho có phải là một cấp số nhân lùi vô hạn không (nếu điều này chưa được nêu lên trong giả thiết của bài toán). Sau đó, áp dụng công thức tính tổng đã biết trong SGK.

– *Cách tìm cấp số nhân lùi vô hạn khi biết một số điều kiện :* Dùng công thức tính tổng để tìm công bội và số hạng đầu.

– *Cách viết một số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số hữu tỉ :* Khai triển số đã cho dưới dạng tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và tính tổng này.

C. BÀI TẬP

1.1. Biết rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0. Giải thích vì sao dãy số (v_n) với $v_n = |u_n|$ cũng có giới hạn là 0. Chiều ngược lại có đúng không ?

1.2. Vì sao dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$ không thể có giới hạn là 0 khi $n \to +\infty$?

1.3. Cho biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, còn dãy số (v_n) không có giới hạn hữu hạn. Dãy số $(u_n + v_n)$ có thể có giới hạn hữu hạn không ?

1.4. a) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Biết $\lim u_n = -\infty$ và $v_n \le u_n$ với mọi n. Có kết luận gì về giới hạn của dãy (v_n) khi $n \to +\infty$?

b) Tìm $\lim v_n$ với $v_n = -n!$.

1.5. Tính giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát sau đây, khi $n \to +\infty$.

a) $a_n = \dfrac{2n - 3n^3 + 1}{n^3 + n^2}$;

b) $b_n = \dfrac{3n^3 - 5n + 1}{n^2 + 4}$;

c) $c_n = \dfrac{2n\sqrt{n}}{n^2 + 2n - 1}$;

d) $d_n = \dfrac{(2 - 3n)^3(n + 1)^2}{1 - 4n^5}$;

e) $u_n = 2^n + \dfrac{1}{n}$;

f) $v_n = \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^n + \dfrac{3^n}{4^n}$;

g) $u_n = \dfrac{3^n - 4^n + 1}{2.4^n + 2^n}$;

h) $v_n = \dfrac{\sqrt{n^2 + n - 1} - \sqrt{4n^2 - 2}}{n + 3}$.

1.6. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim(n^2 + 2n - 5)$; b) $\lim(-n^3 - 3n^2 - 2)$;

c) $\lim\left[4^n + (-2)^n\right]$; d) $\lim n\left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{n^2 + 2}\right)$.

1.7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n). Chứng minh rằng nếu $\lim v_n = 0$ và $|u_n| \leq v_n$ với mọi n thì $\lim u_n = 0$.

1.8. Biết $|u_n - 2| \leq \dfrac{1}{3^n}$. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số (u_n) ?

1.9. Dùng kết quả câu 1.7 để tính giới hạn của các dãy số có số hạng tổng quát như sau :

a) $u_n = \dfrac{1}{n!}$; b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n - 1}$; c) $u_n = \dfrac{2 - n(-1)^n}{1 + 2n^2}$;

d) $u_n = (0{,}99)^n \cos n$; e) $u_n = 5^n - \cos\sqrt{n}\,\pi$.

1.10. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

1.11. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \ldots, \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$

1.12. Tính tổng $S = 1 + 0{,}9 + (0{,}9)^2 + (0{,}9)^3 + \ldots + (0{,}9)^{n-1} + \ldots$

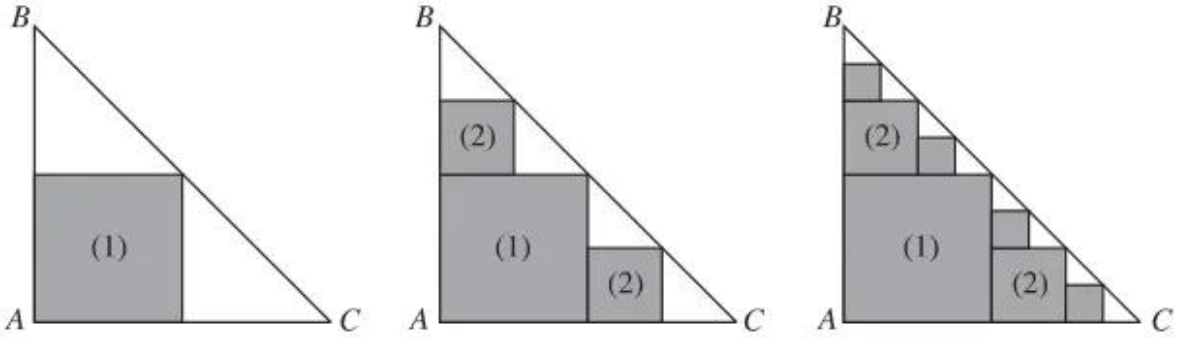
1.13. Tìm số hạng tổng quát của cấp số nhân lùi vô hạn có tổng bằng 3 và công bội $q = \dfrac{2}{3}$.

1.14. Cho dãy số (b_n) có số hạng tổng quát là $b_n = \sin\alpha + \sin^2\alpha + \ldots + \sin^n\alpha$ với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Tìm giới hạn của (b_n).

1.15. Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 34,121212...$ (chu kì là 12). Hãy viết a dưới dạng một phân số.

1.16. Giả sử ABC là tam giác vuông cân tại A với độ dài cạnh góc vuông bằng 1. Ta tạo ra các hình vuông theo các bước sau đây :

– *Bước 1 :* Dựng hình vuông màu xám có một đỉnh là A, ba đỉnh còn lại là các trung điểm của ba cạnh AB, BC và AC (H.1). Kí hiệu hình vuông này là (1).



Hình 1 *Hình 2* *Hình 3*

– *Bước 2 :* Với 2 tam giác vuông cân màu trắng còn lại như trong hình 1, ta lại tạo được 2 hình vuông màu xám khác theo cách trên, kí hiệu là (2) (H.2).

– *Bước 3 :* Với 4 tam giác vuông cân màu trắng như trong hình 2, ta lại tạo được 4 hình vuông mới màu xám theo cách trên (H.3).

– ...

– *Bước thứ n* : Ở bước này ta có 2^{n-1} hình vuông mới màu xám được tạo thành theo cách trên, kí hiệu là (n).

a) Gọi u_n là tổng diện tích của tất cả các hình vuông mới được tạo thành ở bước thứ n. Chứng minh rằng $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

b) Gọi S_n là tổng diện tích của tất cả các hình vuông màu xám có được sau n bước. Quan sát hình vẽ để dự đoán giới hạn của S_n khi $n \to +\infty$. Chứng minh dự đoán đó.