

Chương I. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. Hàm số lượng giác

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số sin

Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là \mathbb{R} và

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

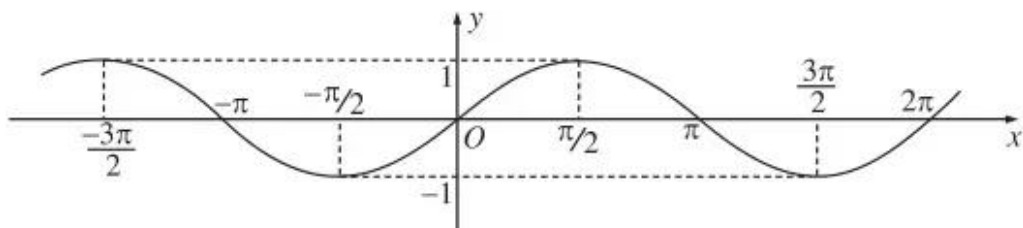
$y = \sin x$ là hàm số lẻ.

$y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\sin x = 0$ khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = 1$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \sin x$ (H.1) :



Hình 1

2. Hàm số cosin

Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là \mathbb{R} và

$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

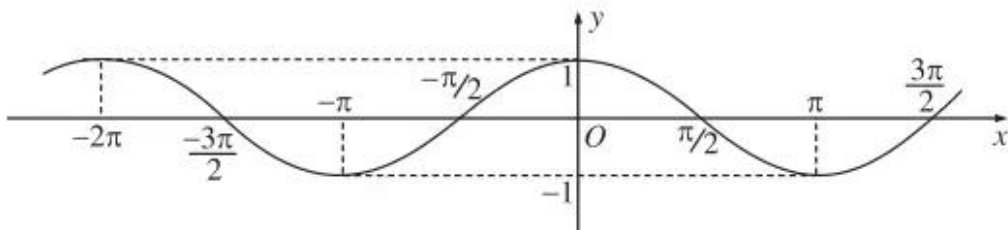
$y = \cos x$ là hàm số chẵn.

$y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\cos x = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = 1$ khi $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x = -1$ khi $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \cos x$ (H.2) :



Hình 2

3. Hàm số tang

Hàm số $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ có tập xác định là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$y = \tan x$ là hàm số lẻ.

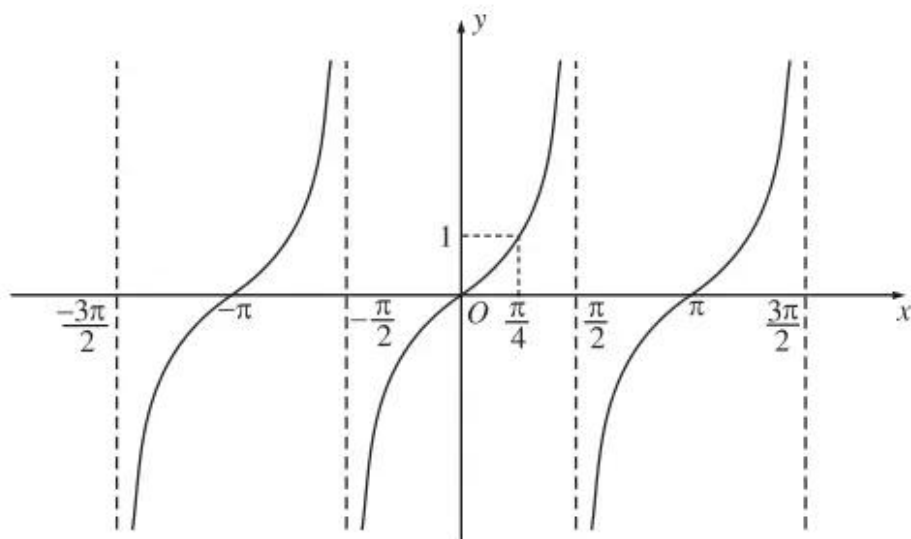
$y = \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\tan x = 0$ khi $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\tan x = 1$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \tan x$ (H.3) :



Hình 3

4. Hàm số cotang

Hàm số $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ có tập xác định là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

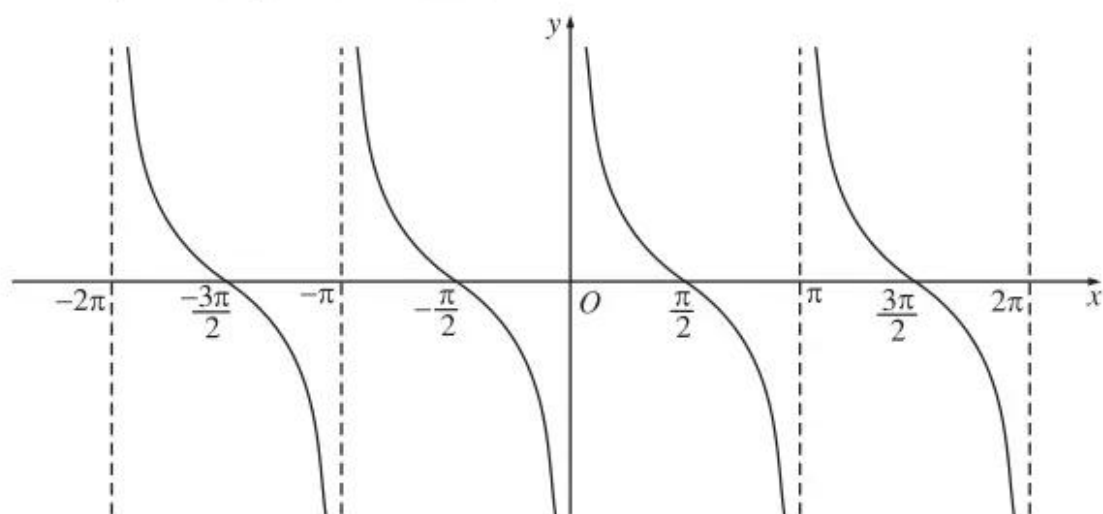
$y = \cot x$ là hàm số lẻ.

$y = \cot x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt :

- $\cot x = 0$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = 1$ khi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- $\cot x = -1$ khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = \cot x$ (H.4) :



Hình 4

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = \cos \frac{2}{x}$;

c) $y = \cos \sqrt{x}$;

d) $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Giải

a) Đặt $t = 3x$, ta được hàm số $y = \sin t$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Mặt khác,

$t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{t}{3} \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số $y = \sin 3x$ là \mathbb{R} .

b) Ta có $\frac{2}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \neq 0$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \cos \frac{2}{x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Ta có $\sqrt{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \geq 0$. Vậy tập xác định của hàm số $y = \cos \sqrt{x}$ là $D = [0 ; +\infty)$.

d) Ta có

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ là $D = [-1; 1)$.

• **Ví dụ 2**

Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \frac{3}{2 \cos x}$;

b) $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$;

d) $y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}}$.

Giải

a) Hàm số $y = \frac{3}{2 \cos x}$ xác định khi và chỉ khi $\cos x \neq 0$ hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

b) Hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi và chỉ khi $2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{hay } x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

c) Hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Tập $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ là tập con của tập $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (ứng với các giá trị k chẵn). Vậy tập xác định của hàm số $\frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

d) Biểu thức $\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}$ luôn không âm và nó có nghĩa khi $\cos x + 1 \neq 0$, hay $\cos x \neq -1$. Vậy ta phải có $x \neq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, do đó tập xác định của

hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin x + 2}{\cos x + 1}}$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

• **Ví dụ 3**

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số :

a) $y = 2 + 3\cos x$;

b) $y = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x$;

c) $y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{3}$;

d) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x$.

Giải

a) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos x \leq 3$, do đó $-1 \leq 2 + 3\cos x \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 5, đạt được khi $\cos x = 1$

$$\Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 , đạt được khi $\cos x = -1$

$$\Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$b) y = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 3 - (2\sin x \cos x)^2 = 3 - \sin^2 2x.$$

Ta có $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ nên $-1 \leq -\sin^2 2x \leq 0$.

Vậy $2 \leq y \leq 3$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2, đạt được khi $\sin^2 2x = 1$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Giá trị lớn nhất của y là 3, đạt được khi $\sin^2 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vì $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ nên $\frac{1}{3} \leq \frac{1 + 4\cos^2 x}{3} \leq \frac{5}{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của y là $\frac{1}{3}$, đạt được khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị lớn nhất của y là $\frac{5}{3}$, đạt được khi $\cos^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

d) $y = 2\sin^2 x - \cos 2x = 1 - 2\cos 2x$.

Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ nên $-2 \leq -2\cos 2x \leq 2$,

do đó $-1 \leq 1 - 2\cos 2x \leq 3$.

Giá trị nhỏ nhất của y là -1 , đạt được khi $\cos 2x = 1$

$$\Leftrightarrow 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Giá trị lớn nhất của y là 3, đạt được khi $\cos 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

• **Ví dụ 4**

Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số

a) $y = x \cos 3x$;

b) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$;

c) $y = x^3 \sin 2x$;

d) $y = \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$.

Giải

a) Kí hiệu $f(x) = x \cos 3x$. Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có với $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = (-x) \cos 3(-x) = -x \cos 3x = -f(x).$$

Vậy $y = x \cos 3x$ là hàm số lẻ.

b) Biểu thức $f(x) = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ xác định khi và chỉ khi

$$\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Với $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R}$, do đó với $x \in D$ thì $-x \in D$. Ta có

$$f(-x) = (-x)^3 \sin 2(-x) = x^3 \sin 2x = f(x).$$

Vậy $y = x^3 \sin 2x$ là hàm số chẵn.

d) Biểu thức $f(x) = \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\cos 2x \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Với $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \frac{-x^3 + \sin x}{\cos 2x} = -f(x)$, do đó hàm số

$y = \frac{x^3 - \sin x}{\cos 2x}$ là hàm số lẻ.

• Ví dụ 5

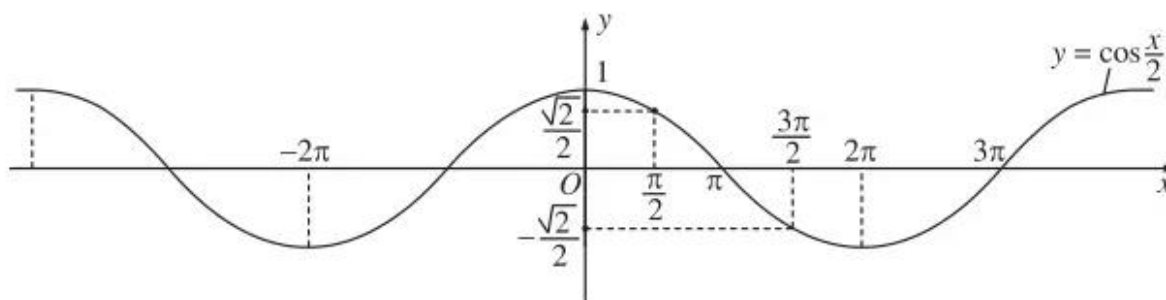
- a) Chứng minh rằng $\cos \frac{1}{2}(x + 4k\pi) = \cos \frac{x}{2}$ với mọi số nguyên k . Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$;
- b) Dựa vào đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$, hãy vẽ đồ thị hàm số $y = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$.

Giải

a) Ta có $\cos \frac{1}{2}(x + 4k\pi) = \cos \left(\frac{x}{2} + 2k\pi \right) = \cos \frac{x}{2}$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$, do đó hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kỳ 4π . Vì vậy ta chỉ cần vẽ đồ thị của hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ trên một đoạn có độ dài 4π , rồi tịnh tiến song song với trục Ox các đoạn có độ dài 4π ta sẽ được đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$.

Hơn nữa, vì $y = \cos \frac{x}{2}$ là hàm số chẵn, nên ta chỉ cần vẽ đồ thị hàm số đó trên đoạn $[0 ; 2\pi]$ rồi lấy đối xứng qua trục tung, sẽ được đồ thị hàm số trên đoạn $[-2\pi ; 2\pi]$.

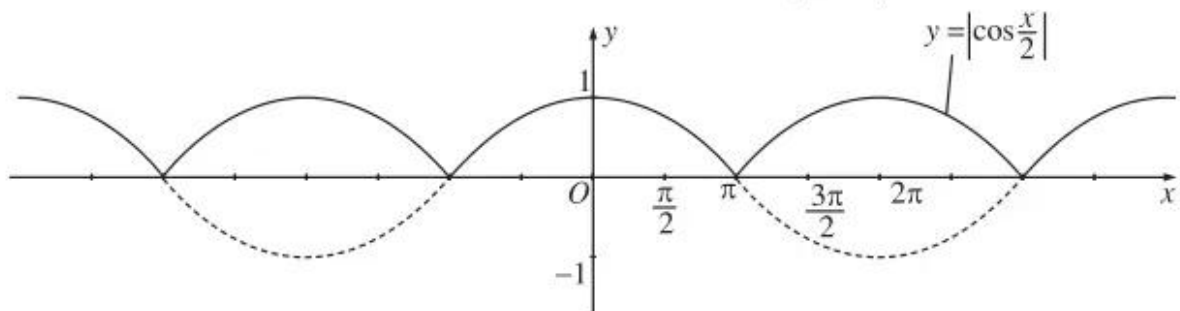
Đồ thị hàm số được biểu diễn trên hình 5.



Hình 5

b) Ta có $\left| \cos \frac{x}{2} \right| = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & \text{nếu } \cos \frac{x}{2} \geq 0 \\ -\cos \frac{x}{2}, & \text{nếu } \cos \frac{x}{2} < 0. \end{cases}$

Vì vậy, từ đồ thị hàm số $y = \cos \frac{x}{2}$ ta giữ nguyên những phần đồ thị nằm phía trên trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành những phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành, ta được đồ thị hàm số $y = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$ (H.6).



Hình 6

C. BÀI TẬP

1.1. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \cos \frac{2x}{x-1}$;

b) $y = \tan \frac{x}{3}$;

c) $y = \cot 2x$;

d) $y = \sin \frac{1}{x^2 - 1}$.

1.2. Tìm tập xác định của các hàm số

a) $y = \sqrt{\cos x + 1}$;

b) $y = \frac{3}{\sin^2 x - \cos^2 x}$;

c) $y = \frac{2}{\cos x - \cos 3x}$;

d) $y = \tan x + \cot x$.

1.3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số

a) $y = 3 - 2|\sin x|$;

b) $y = \cos x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

c) $y = \cos^2 x + 2\cos 2x$;

d) $y = \sqrt{5 - 2\cos^2 x \sin^2 x}$.

1.4. Với những giá trị nào của x , ta có mỗi đẳng thức sau ?

a) $\frac{1}{\tan x} = \cot x$;

b) $\frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x$;

c) $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$;

d) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

1.5. Xác định tính chẵn lẻ của các hàm số

a) $y = \frac{\cos 2x}{x}$;

b) $y = x - \sin x$;

c) $y = \sqrt{1 - \cos x}$;

d) $y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

1.6. a) Chứng minh rằng $\cos 2(x + k\pi) = \cos 2x$, $k \in \mathbb{Z}$. Từ đó vẽ đồ thị hàm số $y = \cos 2x$.

b) Từ đồ thị hàm số $y = \cos 2x$, hãy vẽ đồ thị hàm số $y = |\cos 2x|$.

1.7. Hãy vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = 1 + \sin x$;

b) $y = \cos x - 1$;

c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;

d) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

1.8. Hãy vẽ đồ thị của các hàm số

a) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.