LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN – ĐÁP SỐ CHƯƠNG III

§1.

1.1. a) Đặt vế trái bằng S_n. Kiểm tra với $n = 1$, hệ thức đúng.

Giả sử đã có $S_k = \dfrac{k(3k+1)}{2}$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(3k+4)}{2}$. Thật vậy,

$$S_{k+1} = S_k + 3(k+1) - 1 = \frac{k(3k+1)}{2} + 3k + 2 = \frac{3k^2 + k + 6k + 4}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 7k + 4}{2} = \frac{(k+1)(3k+4)}{2} \text{ (đpcm).}$$

b) Đặt vế trái bằng P_n, làm tương tự như câu a).

1.2. a) Đặt vế trái bằng S_n.

• Với $n = 1$, vế trái chỉ có một số hạng bằng 1, vế phải bằng $\dfrac{1(4.1-1)}{3} = 1$.

• Giả sử đã có $S_k = \dfrac{k(4k^2-1)}{3}$ với $k \geq 1$. Ta phải chứng minh

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}.$$

Thật vậy, ta có

$S_{k+1} = S_k + [2(k+1)-1]^2 = S_k + (2k+1)^2$

$= \dfrac{k(4k^2-1)}{3} + (2k+1)^2 = \dfrac{(2k+1)\left[k(2k-1)+3(2k+1)\right]}{3}$

$= \dfrac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3} = \dfrac{(k+1)(2k+3)(2k+1)}{3} = \dfrac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}.$

b) Đặt vế trái bằng A_n.

• Dễ thấy với $n = 1$, hệ thức đúng.

• Giả sử đã có $A_k = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$, $(k \geq 1)$.

Ta có $A_{k+1} = A_k + (k+1)^3 = \dfrac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$

$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

1.3. a) HD : Đặt $B_n = 2n^3 - 3n^2 + n$, tính B_1.

Giả sử đã có $B_k = 2k^3 - 3k^2 + k$ chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh $B_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k$ chia hết cho 6.

b) Đặt $A_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$. Dễ thấy $A_1 = 133$, chia hết cho 133.

Giả sử đã có $A_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ chia hết cho 133.

Ta có $A_{k+1} = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11.11^{k+1} + 12^{2k-1}.12^2$

$$= 11.11^{k+1} + 12^{2k-1}(11+133) = 11.A_k + 133.12^{2k-1}$$

Vì $A_k \,\vdots\, 133$ nên $A_{k+1} \,\vdots\, 133$.

1.4. a) Với $n = 1$ thì $2^{1+2} = 8 > 7 = 2.1 + 5$.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là $2^{k+2} > 2k + 5$. (1)

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là $2^{k+3} > 2(k + 1) + 5$ hay $2^{k+3} > 2k + 7$. (2)

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2, ta được

$$2^{k+3} > 4k + 10 = 2k + 7 + 2k + 3.$$

Vì $2k + 3 > 0$ nên $2^{k+3} > 2k + 7$ (đpcm).

b) Với $n = 1$ thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử đã có $\sin^{2k}\alpha + \cos^{2k}\alpha \leq 1$ với $k \geq 1$, ta phải chứng minh

$\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha \leq 1$. Thật vậy, ta có

$$\sin^{2k+2}\alpha + \cos^{2k+2}\alpha = \sin^{2k}\alpha.\sin^2\alpha + \cos^{2k}\alpha.\cos^2\alpha$$

$$\leq \sin^{2k}\alpha + \cos^{2k}\alpha \leq 1.$$

1.5. Đây thực chất là bài toán giải bất phương trình trên $\mathbb{N}^*$.

Phương pháp : Có thể dùng phép thử, sau đó dự đoán kết quả và chứng minh.

a) Dùng phép thử với $n = 1, 2, 3, 4$ ta dự đoán : Với $n \geq 3$ thì bất đẳng thức đúng. Ta sẽ chứng minh điều đó bằng quy nạp.

- Với $n = 3$, hiển nhiên đã có kết quả đúng, vì $2^3 = 8 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$.
- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, tức là $2^k > 2k + 1$,

ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$2^{k+1} > 2k + 3. \quad (2)$$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2, ta được

$$2^{k+1} > 4k + 2 = 2k + 3 + 2k - 1 > 2k + 3.$$

b) HD : Dùng phép thử.

Với n từ 1 đến 6, bất đẳng thức đều không đúng. Tuy nhiên không thể vội vàng kết luận bất phương trình vô nghiệm.

Nếu thử tiếp ta thấy rằng bất phương trình đúng khi $n = 7$. Ta có thể làm tiếp để đi tới dự đoán : Với $n \geq 7$ thì bất phương trình được nghiệm đúng. Sau đó chứng minh tương tự như câu a).

c) Làm tương tự như câu a) và câu b).

ĐS : $n \geq 4$.

1.6. a) Tính $S_1 = \frac{1}{5}$, $S_2 = \frac{2}{9}$, $S_3 = \frac{3}{13}$, $S_4 = \frac{4}{17}$.

b) Viết lại $S = \frac{1}{5} = \frac{1}{4.1+1}$, $S_2 = \frac{2}{9} = \frac{2}{4.2+1}$, $S_3 = \frac{3}{4.3+1}$, $S_4 = \frac{4}{4.4+1}$.

Ta có thể dự đoán $S_n = \frac{n}{4n+1}$.

Học sinh tự chứng minh công thức trên.

1.7. Với $n = 1$, bất đẳng thức đúng.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k. \quad (1)$$

Nhân hai vế của (1) với $1 + a_{k+1}$ ta được

$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq (1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k)(1 + a_{k+1}) =$

$= 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} + a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \ldots + a_k.a_{k+1}$.

Vì $a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \ldots + a_k \,.\, a_{k+1} > 0$ nên

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1},$$

nghĩa là bất đẳng thức cũng đúng với $n = k + 1$.

1.8. Với $n = 1$ thì $|a_1| = |a_1|$.

Với $n = 2$ thì $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$. Đây là bất đẳng thức khá quen thuộc và dấu bằng xảy ra khi a_1, a_2 cùng dấu.

Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k \geq 2$. Đặt $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = A$, ta có

$$|A| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|, \quad (1)$$

mà $\quad |A + a_{k+1}| \le |A| + |a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k| + |a_{k+1}|$

nên $\quad |a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1}| \le |a_1| + |a_2| + ... + |a_k| + |a_{k+1}|,$

tức là bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.