Chương III. DÃY SỐ
CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp toán học

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học, ta tiến hành hai bước :

Bước 1 : Kiểm tra rằng mệnh đề đúng với $n = 1$.

Bước 2 : Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k$ ($k \geq 1$) (ta gọi là giả thiết quy nạp) và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

2. Trong trường hợp phải chứng minh một mệnh đề là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq p$ (p là số tự nhiên) thì :

- Ở bước 1, ta kiểm tra mệnh đề đúng với $n = p$.
- Ở bước 2, ta giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì $n = k$ ($k \geq p$) và chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

3. Phép thử với một số hữu hạn số tự nhiên, tuy không phải là chứng minh, nhưng cho phép ta dự đoán được kết quả. Kết quả này chỉ là giả thiết, và để chứng minh ta có thể dùng phương pháp quy nạp toán học.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Chứng minh rằng

$$n^7 - n \text{ chia hết cho 7 với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Giải

Đặt $A_n = n^7 - n$.

Khi $n = 1$ thì $A_1 = 0$, chia hết cho 7.

Giả sử đã có

$$A_k = (k^7 - k) \vdots 7 \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh $A_{k+1} \vdots 7$, tức là $(k + 1)^7 - (k + 1) \vdots 7$.

Thật vậy, áp dụng công thức Nhị thức Niu-tơn ta có

$$A_{k+1} = (k + 1)^7 - (k + 1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - \mathrm{k} - 1$$
$$= k^7 - k + 7\,(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k).$$

Theo giả thiết quy nạp thì $A_k = k^7 - k$ chia hết cho 7, do đó

$$A_{k+1} \vdots 7.$$

Vậy $n^7 - n$ chia hết cho 7 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• ***Ví dụ 2***

Chứng minh rằng

$$1.2 + 2.5 + 3.8 + ... + n(3n - 1) = n^2(n + 1) \text{ với } n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Giải

Bước 1 : Với $n = 1$, vế trái bằng $1.2 = 2$, vế phải bằng $1^2(1 + 1) = 2$.
Hệ thức (1) đúng.

Bước 2 : Đặt vế trái bằng S_n.

Giả sử hệ thức (1) đúng với $n = k \geq 1$, tức là :

$$S_k = 1.2 + 2.5 + ... + k(3k - 1) = k^2(k + 1) \text{ (giả thiết quy nạp).}$$

Ta phải chứng minh rằng (1) cũng đúng với $n = k + 1$, tức là :

$$S_{k+1} = (k + 1)^2\,(k + 2).$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + (k + 1)\,[3(k + 1) - 1] = k^2(k + 1) + (k + 1)\,(3k + 2)$$
$$= (k + 1)\,(k^2 + 3k + 2) = (k + 1)^2\,(k + 2).$$

Vậy hệ thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}_{n \text{ dấu căn}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

Giải

Đặt vế trái của hệ thức (3) bằng C_n.

Khi $n = 1$, vế trái bằng $\sqrt{2}$, vế phải bằng $2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$; hệ thức (3) đúng.

Giả sử hệ thức (3) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$C_k = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}.$$

Ta phải chứng minh

$$C_{k+1} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$C_{k+1} = \sqrt{2 + C_k} = \sqrt{2 + 2\cos\frac{\pi}{2^{k+1}}}$$

$$= \sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{2^{k+2}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{k+2}} \text{ (vì } \cos\frac{\pi}{2^{k+2}} > 0).$$

Vậy hệ thức (3) đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 4***

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 3$ ta có

$$3^n > n^2 + 4n + 5. \qquad (4)$$

Giải

Với $n = 3$, vế trái bằng 27, còn vế phải bằng 26.

Bất đẳng thức (4) đúng.

Giả sử bất đẳng thức (4) đúng với $n = k \geq 3$, tức là

$$3^k > k^2 + 4k + 5. \qquad (4')$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Thật vậy, nhân hai vế của bất đẳng thức (4') với 3 ta có

$$3^{k+1} > 3k^2 + 12k + 15 = (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + 2k^2 + 6k + 5.$$

Vì $2k^2 + 6k + 5 > 0$ nên

$$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Bất đẳng thức (4) đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 5***

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \qquad (5)$$

trong đó a, b là các số dương và $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

Trước hết nhận xét rằng nếu $a = b$ thì bất đẳng thức (5) xảy ra dấu bằng (=) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giả sử $a \neq b$.

Nếu $n = 1$ thì bất đẳng thức (5) đúng và dấu bằng (=) xảy ra.

Ta sẽ chứng minh với $n \geq 2$ thì bất đẳng thức (5) đúng, bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy :

Với $n = 2$ thì (5) có dạng $\dfrac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ hay $(a-b)^2 \geq 0$.

Rõ ràng bất đẳng thức này đúng và dấu bằng không xảy ra.

Giả sử bất đẳng thức (5) đúng với $a \neq b$ và $n = k \geq 2$, tức là

$$\frac{a^k + b^k}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^k.$$

Nhân hai vế của bất đẳng thức này với $a + b > 0$, ta có

$$\frac{a^k + b^k}{2} \cdot (a + b) > \frac{(a + b)^{k+1}}{2^k}$$

hay
$$\frac{a^{k+1} + a^k b + ab^k + b^{k+1}}{2} > \frac{(a + b)^{k+1}}{2^k}. \qquad (5')$$

Vì
$$a^{k+1} + b^{k+1} - (a^k b + ab^k) = a^k(a - b) - b^k(a - b)$$
$$= (a - b)(a^k - b^k) > 0$$

nên
$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k. \qquad (5'')$$

Từ (5') và (5'') suy ra

$$\frac{(a^{k+1} + b^{k+1}) + (a^{k+1} + b^{k+1})}{2} > \frac{(a + b)^{k+1}}{2^k}$$

hay
$$\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} > \left(\frac{a + b}{2}\right)^{k+1};$$

nghĩa là bất đẳng thức (5) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, bất đẳng thức đã được chứng minh.

• ***Ví dụ 6***

Với giá trị nào của số nguyên dương n, ta có

$$2^{n+1} > n^2 + 3n\ ? \qquad (6)$$

Giải

Thực chất đây là bài toán giải bất phương trình ẩn số n trên tập hợp $\mathbb{N}^*$. Tuy nhiên, khó có thể giải nó bằng cách thông thường.

Đặt vế trái bằng A_n và vế phải bằng B_n.

Bằng phép thử với $n = 1, 2, 3$, dễ dàng thấy rằng

$$A_1 < B_1\ ;\ A_2 < B_2\ ;\ A_3 < B_3.$$

Đến đây, nếu vội kết luận bất phương trình (6) vô nghiệm thì sẽ là sai lầm, vì chỉ cần thử với $n = 4$ ta có $A_4 = 32 > 28 = B_4$. Thử tiếp với $n = 5, 6$ ta cũng có $A_5 > B_5$, $A_6 > B_6$. Đến đây ta có thể dự đoán : Với mọi số tự nhiên

$n \geq 4$ ta có $2^{n+1} > n^2 + 3n$. Ta sẽ chứng minh điều dự đoán đó bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, giả sử bất đẳng thức (6) đúng với $n = k \geq 4$, tức là

$$2^{k+1} > k^2 + 3k. \tag{6'}$$

Nhân hai vế của (6') với 2 ta được

$$2^{k+2} > 2k^2 + 6k = (k+1)^2 + 3(k+1) + k^2 + k - 4.$$

Vì $k \geq 4$ nên $k^2 + k - 4 > 0$, do đó

$$2^{k+2} = 2^{(k+1)+1} > (k+1)^2 + 3(k+1)\ ;$$

tức là (6) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, với $n \geq 4$ thì $2^{n+1} > n^2 + 3n$.

• ***Ví dụ 7***

Cho tổng $S_n = \dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + ... + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Hãy dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Giải

a) Ta có $\quad S_1 = \dfrac{1}{1.3} = \dfrac{1}{3}$

$$S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$S_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5.7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$S_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7.9} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}.$$

b) Từ kết quả ở câu a) ta dự đoán

$$S_n = \frac{n}{2n+1}. \tag{7}$$

Ta sẽ chứng minh công thức (7) bằng phương pháp quy nạp.

- Với $n = 1$, theo a) thì (7) là đúng.
- Giả sử công thức (7) đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$S_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy, từ giả thiết quy nạp ta có

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{\left[2(k+1)-1\right]\left[2(k+1)+1\right]} = S_k + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2(k+1)+1}$$

tức là (7) cũng đúng với $n = k + 1$.

Vậy công thức (7) đã được chứng minh.

- ***Ví dụ 8***

Chứng minh rằng nếu tam giác ABC vuông tại A, có số đo các cạnh là a, b, c thì với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có bất đẳng thức

$$b^n + c^n \leq a^n. \qquad (8)$$

Giải

- Với $n = 2$ thì theo định lý Py-ta-go ta có $b^2 + c^2 = a^2$.

Vậy bất đẳng thức (8) đúng.

- Giả sử bất đẳng thức (8) đúng với $n = k \geq 2$, tức là

$$b^k + c^k \leq a^k. \qquad (8')$$

Khi đó $b^{k+1} + c^{k+1} = b^k.b + c^k.c \leq b^k a + c^k a = (b^k + c^k)a$.

Sử dụng giả thiết quy nạp (8'), ta có

$b^{k+1} + c^{k+1} \leq a^{k+1}$, tức là (8) đúng với $n = k + 1$.

Vậy, bất đẳng thức (8) đã được chứng minh. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n = 2$.

Nhận xét

1. Các ví dụ nêu trên thể hiện rõ hai bước của phương pháp quy nạp :

Bước 1 : Kiểm tra mệnh đề (điều cần chứng minh) đúng với $n = 1$ (hoặc với $n = p$, p là số tự nhiên).

Bước 2 : Giả sử mệnh đề đúng với $n = k \geq 1$.

Sau đó, phải chứng minh rằng nó cũng đúng với $n = k + 1$.

Lưu ý rằng phải thực hiện đầy đủ cả hai bước, xong bước 1 mới làm bước 2.

Đặc biệt, ở bước 2 phải đặt ra được bài toán, trong đó :

Giả thiết (quy nạp) là mệnh đề đúng với $n = k$ và kết luận là mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Hoàn thành xong hai bước phải nêu kết luận cuối cùng.

2. Phương pháp quy nạp có thể dùng để giải các loại bài toán sau :

Loại 1 : Chứng minh một kết luận cho sẵn (xem các Ví dụ 1, 2, 3, 4, 5, 8).

Loại 2 : Bằng cách sử dụng phép thử để dự đoán kết quả, sau đó mới chứng minh bằng phương pháp quy nạp (xem các Ví dụ 6, 7).

C. BÀI TẬP

1.1. Chứng minh các đẳng thức sau (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2 + 5 + 8 + ... + (3n - 1) = \dfrac{n(3n + 1)}{2}$;

b) $3 + 9 + 27 + ... + 3^n = \dfrac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$.

1.2. Chứng minh các đẳng thức sau (với $n \in \mathbb{N}^*$)

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(4n^2 - 1)}{3}$;

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$.

1.3. Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

a) $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

b) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133 ;

1.4. Chứng minh các bất đẳng thức sau ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) $2^{n+2} > 2n + 5$;

b) $\sin^{2n}\alpha + \cos^{2n}\alpha \leq 1$;

1.5. Với giá trị nào của số tự nhiên n ta có

a) $2^n > 2n + 1$;

b) $2^n > n^2 + 4n + 5$;

c) $3^n > 2^n + 7n$?

1.6. Cho tổng

$$S_n = \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}.$$

a) Tính S_1, S_2, S_3, S_4 ;

b) Dự đoán công thức tính S_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

1.7. Cho n số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thoả mãn điều kiện

$$-1 < a_i \leq 0 \text{ với } i = \overline{1, n}.$$

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

1.8. Chứng minh rằng với các số thực $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), ta có

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$