§2.

2.1. a) $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^5}, \frac{1}{10^7}, \frac{1}{10^9}$. Dự đoán dãy (u_n) giảm.

Để chứng minh, ta xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10^{1-2(n+1)}}{10^{1-2n}} = \frac{1}{10^2} < 1$. Vậy dãy số giảm.

b) $-4, 2, 20, 74, 236$. Xét dấu của hiệu $u_{n+1} - u_n$.

c) $3, \frac{3}{4}, \frac{3}{9}, \frac{3}{16}, \frac{3}{25}$. Làm tương tự câu b).

d) $\frac{3}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{4}, \frac{27\sqrt{3}}{8}, \frac{81\sqrt{4}}{16}, \frac{243\sqrt{5}}{32}$. Phần tiếp theo có thể làm tương tự câu a).

➢ **Chú ý.** Qua bốn bài tập trên, học sinh có thể rút ra nhận xét về tính hợp lí của việc xét hiệu $u_{n+1} - u_n$ hay xét tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, khi khảo sát tính đơn điệu của dãy số.

2.2. a) Bị chặn trên vì $u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Bị chặn dưới vì $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Bị chặn dưới vì $u_n \geq \sqrt{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Bị chặn vì $0 < u_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2.3. a) ĐS : $u_n = 5 + \frac{(n-1)(3n-4)}{2}$.

b) Tương tự bài 2.1.

2.4. a) Ta có $u_1 = 0$.

Xét hiệu $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 3 - n^2 + 4n - 3 = 2n - 3$.

Vậy công thức truy hồi là $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

b) $u_n = n^2 - 4n + 3 = (n-2)^2 - 1 \geq -1$. Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới nhưng không bị chặn trên (Học sinh tự giải thích điều này).

c) $S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 - 4(1 + 2 + ... + n) + 3n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4.\frac{n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6} = \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}.$$

2.5. b) HD : Tìm hiệu $u_{n+1} - u_n$.

ĐS : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

c) HD : Xét dấu $u_{n+1} - u_n$.

2.6. a) Từ $u_{n+1} - u_n = n^3$ ta có

$u_1 = 1$;

$u_2 - u_1 = 1^3$;

$u_3 - u_2 = 2^3$;

...

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$;

$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$.

Cộng từng vế n đẳng thức trên và rút gọn, ta được

$$u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3.$$

Sử dụng kết quả bài tập 1.2 b) – §1 ta có

$$1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

Vậy $$u_n = 1 + \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

$$u_{100} = 24\,502\,501.$$

b) Hãy viết một vài số hạng đầu của dãy và quan sát

$$v_1 = 2;$$

$$v_2 = v_1^2 = 2^2;$$

$$v_3 = v_2^2 = 2^4 = 2^{2^2};$$

$$v_4 = v_3^2 = 2^8 = 2^{2^3}.$$

Từ đây dự đoán $v_n = 2^{2^{n-1}}$.

Công thức trên dễ dàng chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

Số 4294967296 là số hạng thứ sáu của dãy số (v_n).

2.7. a) $u_1 = 1$

$u_2 = 3$

$u_3 = 6$

$u_4 = 10$

b) Số các tam giác u_n tạo thành từ B và $n + 1$ điểm chính là số tổ hợp chập 2 của $n + 1$ phần tử :

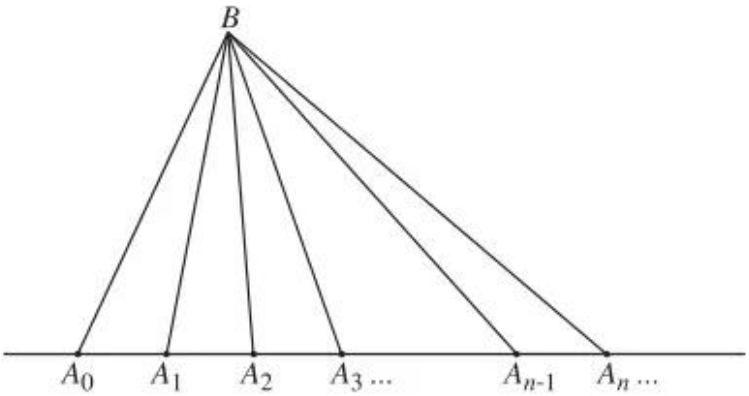
$$u_n = C_{n+1}^2.$$

Áp dụng công thức

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

ta có $C_{n+2}^2 = C_{n+1}^2 + C_{n+1}^1$

hay $u_{n+1} = u_n + n + 1$.



2.8. Vì $0 < u_n < 1$ với mọi n nên $1 - u_{n+1} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$u_{n+1}(1 - u_{n+1}) \le \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Mặt khác, từ giả thiết

$$u_{n+1} < 1 - \frac{1}{4u_n} \text{ suy ra}$$

$$u_{n+1} \,.\, u_n < u_n - \frac{1}{4} \text{ hay } \frac{1}{4} < u_n\,(1 - u_{n+1}). \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có

$$u_{n+1}\,(1 - u_{n+1}) < u_n\,(1 - u_{n+1}) \text{ hay } u_{n+1} < u_n.$$