§2. Dãy số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

a) Mỗi hàm số u xác định trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}^*$ được gọi là dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số)

$$\begin{aligned} u \ : \ \mathbb{N}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

Đặt $u(n) = u_n$ và gọi nó là *số hạng tổng quát* của dãy số (u_n).

b) Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, ..., m\}$, với $m \in \mathbb{N}^*$, được gọi là *dãy số hữu hạn*.

2. Cách cho một dãy số

a) Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát

Khi đó $u_n = f(n)$, trong đó f là một hàm số xác định trên $\mathbb{N}^*$.

Đây là cách khá thông dụng (giống như hàm số) và nếu biết giá trị của n (hay cũng chính là số thứ tự của số hạng) thì ta có thể tính ngay được u_n.

b) Dãy số cho bằng phương pháp mô tả

Người ta cho một mệnh đề mô tả cách xác định các số hạng liên tiếp của dãy số. Tuy nhiên, không thể tìm ngay được u_n với n tuỳ ý.

c) Dãy số cho bằng công thức truy hồi

• Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).

• Với $n \geq 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc một vài số hạng đứng ngay trước nó). Các công thức có thể là :

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ với } n \geq 2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} u_1 = a, u_2 = b \\ u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}) \text{ với } n \geq 3. \end{cases}$$

3. Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là *tăng* nếu $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
- Dãy số (u_n) được gọi là *giảm* nếu $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Phương pháp khảo sát tính đơn điệu

Phương pháp 1 : Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n$.

– Nếu $H > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng ;

– Nếu $H < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm.

Phương pháp 2

Nếu $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì lập tỉ số $P = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, rồi so sánh với 1.

– Nếu $P > 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số tăng ;

– Nếu $P < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì dãy số giảm.

4. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số M sao cho

$$u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số (u_n) được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số m sao cho

$$u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Dãy số được gọi là *bị chặn*, nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại hai số m, M sao cho

$$m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

➢ **Lưu ý :** Các dấu "=" nêu trên không nhất thiết phải xảy ra.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Biết năm số hạng đầu của một dãy số là

3, 4, 6, 9, 13, ...

a) Hãy chỉ ra một quy luật rồi viết tiếp 5 số hạng của dãy số đã cho.

b) Hãy xét khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải. Nêu nhận xét và viết tiếp năm số hạng theo cách đó.

c) Lập công thức truy hồi của dãy số được cho theo quy luật nêu ở câu b).

d) Tìm công thức biểu diễn u_n.

Giải

a) Có nhiều quy luật để có một dãy số mà 5 số hạng đầu như đã cho. Đơn giản nhất là dãy số đã cho tuần hoàn với chu kì bằng 5, ta có dãy

3, 4, 6, 9, 13, 3, 4, 6, 9, 13, ...

Tuy nhiên, nếu nhận xét tổng 3 + 4 + 6 + 9 + 13 = 35 để nêu ra quy luật : "Dãy số gồm liên tiếp các nhóm 5 số hạng có tổng bằng 35" thì theo đó ta sẽ có nhiều kết quả khác nhau, do phương trình 5 ẩn số

$u_6 + u_7 + u_8 + u_9 + u_{10} = 35$ là vô định.

"Quy luật" vừa nêu đã vi phạm định nghĩa dãy số.

b) Ta có $4 - 3 = 1$

$6 - 4 = 2$

$9 - 6 = 3$

$13 - 9 = 4$

Nhận xét : Khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải là 4 số hạng đầu của dãy số tự nhiên khác 0. Từ đây có thể nêu kết luận : Năm số hạng trên là các số hạng của một dãy số, trong đó các khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp từ trái sang phải lập thành dãy số

1, 2, 3, 4, ..., n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy, năm số hạng tiếp theo là

18, 24, 31, 39, 48.

c) Dễ thấy theo quy luật nêu trên thì

$u_{n+1} - u_n = n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ và công thức truy hồi là

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

d) Để tìm u_n ta viết

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 \\ u_2 &= u_1 + 1 \\ u_3 &= u_2 + 2 \\ u_4 &= u_3 + 3 \\ &\ldots \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + n - 2 \\ u_n &= u_{n-1} + n - 1. \end{aligned}$$

Cộng từng vế n đẳng thức trên và rút gọn, ta có

$$\begin{aligned} u_n &= 3 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) \\ &= 3 + \frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $\quad u_n = \dfrac{n^2 - n + 6}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

• ***Ví dụ 2***

Các dãy số (u_n) được cho bởi các công thức :

a) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

b) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{3^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;

c) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Hãy viết sáu số hạng đầu của mỗi dãy số. Khảo sát tính tăng, giảm của chúng. Tìm số hạng tổng quát của các dãy c) và d).

Giải

a) Sáu số hạng đầu : $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{15}{17}, \frac{31}{33}, \frac{63}{65}$.

Dự đoán dãy số tăng.

Ta sẽ chứng minh dự đoán đó. Thật vậy, xét hiệu

$$H = u_{n+1} - u_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1} + 1} - \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$$

$$= \frac{(2^{n+1} - 1)(2^n + 1) - (2^{n+1} + 1)(2^n - 1)}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)}$$

$$= \frac{2^{2n+1} + 2^{n+1} - 2^n - 1 - 2^{2n+1} + 2^{n+1} - 2^n + 1}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)}$$

$$= \frac{2.2^{n+1} - 2.2^n}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)} = \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1} + 1)(2^n + 1)} > 0.$$

Suy ra $u_{n+1} > u_n$. Vậy dãy (u_n) tăng.

b) Sáu số hạng đầu :

$$\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{27}, \frac{\sqrt{4}}{81}, \frac{\sqrt{5}}{243}, \frac{\sqrt{6}}{729}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy số giảm.

Xét hiệu $\quad H = u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{3^n} = \frac{\sqrt{n+1} - 3\sqrt{n}}{3^{n+1}}$.

Do $3^{n+1} > 0$, $3\sqrt{n} = \sqrt{9n} = \sqrt{n + 8n} > \sqrt{n+1}$, nên $H < 0$.

c) Sáu số hạng đầu :

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy số tăng.

- Với $n = 1$, rõ ràng $u_1 = 1 < \sqrt{2} = u_2$.
- Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là

$$u_{k+1} > u_k.$$

Theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+2} = \sqrt{u_{k+1}^2 + 1} > \sqrt{u_k^2 + 1} = u_{k+1},$$

tức là khẳng định đúng với $n = k + 1$.

Vậy dãy số tăng.

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh $u_n = \sqrt{n}$ bằng quy nạp.

d) Sáu số hạng đầu : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$.

Ta sẽ chứng minh dãy số giảm bằng quy nạp.

• Với $n = 1$, rõ ràng $u_1 = 1 > \frac{1}{2} = u_2$.

• Giả sử đã có $u_{k+1} < u_k$ $(k \geq 1)$, ta phải chứng minh

$$u_{k+2} < u_{k+1}.$$

Thật vậy, theo công thức của dãy số và giả thiết quy nạp, ta có

$$u_{k+2} = \frac{u_{k+1}}{1 + u_{k+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u_{k+1}}} < \frac{1}{1 + \frac{1}{u_k}} = u_{k+1}$$

(vì $0 < u_{k+1} < u_k$ nên $\frac{1}{u_{k+1}} > \frac{1}{u_k}$). Vậy dãy (u_n) giảm.

Bạn đọc có thể chứng minh $u_n = \frac{1}{n}$ bằng quy nạp.

• ***Ví dụ 3***

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3n + (-1)^n}{4n + (-1)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Tính sáu số hạng đầu của dãy số. Nêu nhận xét về tính đơn điệu của dãy số.

b) Tính u_{2n} và u_{2n+1}. Chứng minh $0 < u_n \leq \frac{3n+1}{4n-1}$ với mọi $n \geq 1$.

Giải

a) Sáu số hạng đầu của dãy số : $\frac{2}{5}, 1, \frac{8}{13}, \frac{13}{15}, \frac{14}{21}, \frac{19}{23}$. Dãy số không tăng và không giảm.

b)
$$u_{2n} = \frac{3.2n + (-1)^{2n}}{4.2n + (-1)^{2n+1}} = \frac{6n+1}{8n-1}.$$

$$u_{2n+1} = \frac{3(2n+1) + (-1)^{2n+1}}{4(2n+1) + (-1)^{2n+2}} = \frac{6n+2}{8n+5}.$$

Dễ thấy $u_n > 0$. Ta xét hai trường hợp :

• n chẵn : $u_n = \dfrac{3n+1}{4n-1}$;

• n lẻ : $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+1} < \dfrac{3n+1}{4n-1}$;

Vậy : $0 < u_n \leq \dfrac{3n+1}{4n-1}$ với mọi n.

• ***Ví dụ 4***

Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

a) Viết sáu số hạng đầu của dãy số ;

b) Tìm công thức tính u_n theo n.

Giải

a) Sáu số hạng đầu là : 1, 2, 6, 15, 31, 56.

b) Sử dụng công thức để viết liên tiếp n hệ thức

$$u_1 = 1;$$

$$u_2 = u_1 + 1^2;$$

$$u_3 = u_2 + 2^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_{n-1} = u_{n-2} + (n-2)^2;$$

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)^2.$$

Cộng từng vế của n hệ thức trên và rút gọn, ta được

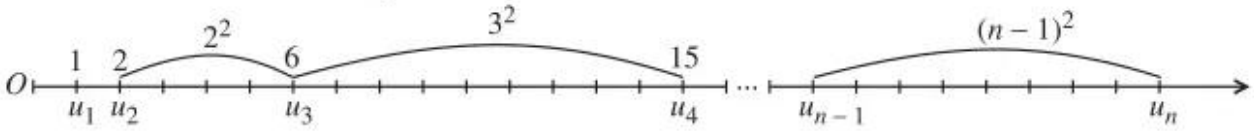
$$u_n = 1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2.$$

Sử dụng kết quả tổng bình phương $n - 1$ số tự nhiên, ta có

$$u_n = 1 + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Chú ý : Nếu biểu diễn các số hạng của dãy trên trên trục số và chú ý đến khoảng cách giữa hai số hạng liên tiếp ta cũng có

$$u_n = 1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2.$$



• ***Ví dụ 5***

Với giá trị nào của a thì dãy số (u_n), với $u_n = \dfrac{na+2}{n+1}$, là dãy số tăng ? dãy số giảm ?

Giải

Xét hiệu $\quad H = u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)a+2}{n+1+1} - \dfrac{na+2}{n+1}$

$$= \frac{a-2}{(n+2)(n+1)}.$$

Vì $(n+2)(n+1) > 0$ nên :

Nếu $a > 2$ thì $H > 0$, suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Nếu $a < 2$ thì $H < 0$, suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

• ***Ví dụ 6***

Cho dãy số (u_n) với $u_n = (1-a)^n + (1+a)^n$, trong đó $0 < a < 1$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Viết công thức truy hồi của dãy số ;

b) Khảo sát tính tăng, giảm của dãy số.

Giải

a) Với $n = 1$, ta có $u_1 = 1 - a + 1 + a = 2$.

Với $n \geq 1$ thì $u_{n+1} = (1-a)^{n+1} + (1+a)^{n+1}$

do đó $u_{n+1} - u_n = (1-a)^{n+1} + (1+a)^{n+1} - (1-a)^n - (1+a)^n$

$$= (1-a)^n(1-a-1) + (1+a)^n(1+a-1)$$

$$= a\,[(1+a)^n - (1-a)^n] \qquad (*)$$

hay $\qquad u_{n+1} = u_n + a[(1+a)^n - (1-a)^n].$

Vậy công thức truy hồi là

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + a[(1+a)^n - (1-a)^n] \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

b) Vì $0 < a < 1$ nên $1 + a > 1 - a > 0$, suy ra $(1+a)^n > (1-a)^n$

hay $(1+a)^n - (1-a)^n > 0$. Từ kết quả (*), ta có

$u_{n+1} - u_n = a\,[(1+a)^n - (1-a)^n] > 0$, tức là dãy số đã cho là dãy số tăng.

Nhận xét

Cách giải của câu a) cho ta một phương pháp để tìm công thức truy hồi khi biết số hạng tổng quát u_n, đó là

– Tìm u_1.

– Tính u_{n+1} rồi tìm hiệu $u_{n+1} - u_n$ (cũng có thể tìm tổng $u_{n+1} + u_n$).

• ***Ví dụ 7***

Cho phương trình

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Gọi α, β là hai nghiệm của nó ($\alpha > \beta$).

Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$, với $n \geq 1$, là dãy Phi-bô-na-xi.

Giải

Ta có $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Từ công thức u_n suy ra

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^1 - \beta^1) = 1\ ;$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}.1.\sqrt{5} = 1.$$

Để tính u_n, ta chú ý rằng $\alpha^2 = \alpha + 1$ và $\beta^2 = \beta + 1$, do đó

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-2}\,.\,\alpha^2 - \beta^{n-2}\,.\,\beta^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} + \alpha^{n-2} - \beta^{n-2})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right) = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Vậy ta có công thức truy hồi của dãy Phi-bô-na-xi

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ với } n \geq 3. \end{cases}$$

• ***Ví dụ 8***

Cho dãy số xác định bởi công thức

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n + 1 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Tính u_2, u_3, u_4 ;

b) Chứng minh rằng $u_{n+3} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải

a) $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 1$. Nếu tính tiếp ta lại có $u_5 = 2$, $u_6 = 0$, $u_7 = 1$. Như vậy dãy số trên gồm các nhóm 3 số hạng (1, 2, 0) được nối tiếp nhau một cách vô hạn.

b) Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 1$, theo câu a) thì công thức đúng vì $u_4 = 1 = u_1$.

Giả sử công thức đúng với một giá trị bất kì $n = k \geq 1$, tức là $u_{k+3} = u_k$.

Ta phải chứng minh nó cũng đúng với $n = k + 1$, tức là

$$u_{k+4} = u_{k+1}.$$

Thật vậy, theo công thức của dãy số thì

$$u_{k+4} = u_{(k+3)+1} = -\frac{3}{2}u_{k+3}^2 + \frac{5}{2}u_{k+3} + 1.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp $u_{k+3} = u_k$, ta có

$$u_{k+4} = -\frac{3}{2}u_k^2 + \frac{5}{2}u_k + 1 = u_{k+1}.$$

Vậy công thức đã được chứng minh.

➢ **Chú ý.** Dãy số đã cho được gọi là dãy số tuần hoàn với chu kì là 3.

Tổng quát, ta có định nghĩa sau :

Dãy số (u_n) được gọi là tuần hoàn với chu kì p ($p \in \mathbb{N}^*$),

nếu $u_{n+p} = u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

C. BÀI TẬP

2.1. Viết năm số hạng đầu và khảo sát tính tăng, giảm của các dãy số (u_n), biết

a) $u_n = 10^{1-2n}$;

b) $u_n = 3^n - 7$;

c) $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2}$;

d) $u_n = \dfrac{3^n\sqrt{n}}{2^n}$.

2.2. Trong các dãy số (u_n) cho dưới đây, dãy số nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn ?

a) $u_n = 2n - n^2$;

b) $u_n = n + \dfrac{1}{n}$;

c) $u_n = \sqrt{n^2 - 4n + 7}$;

d) $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 6n + 11}$.

2.3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

a) Tìm công thức tính u_n theo n ;

b) Chứng minh (u_n) là dãy số tăng.

2.4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

a) Viết công thức truy hồi của dãy số ;

b) Chứng minh dãy số bị chặn dưới ;

c) Tính tổng n số hạng đầu của dãy đã cho.

2.5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n - 1).2^n$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số ;

b) Tìm công thức truy hồi ;

c) Chứng minh (u_n) là dãy số tăng và bị chặn dưới.

2.6. Các dãy số (u_n), (v_n) được xác định bằng công thức

a) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \text{ với } n \geq 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = v_n^2 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Tìm công thức tính u_n, v_n theo n. Tính số hạng thứ 100 của dãy số (u_n). Hỏi số 4294967296 là số hạng thứ mấy của dãy số (v_n).

2.7. Dãy số (x_n) được biểu diễn trên trục số bởi tập hợp các điểm, kí hiệu là A :

$$A = \{A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...\}.$$

Gọi B là một điểm nằm ngoài trục số. Người ta dựng các tam giác đỉnh B và hai đỉnh còn lại thuộc tập hợp A.

Đặt u_n là số các tam giác được tạo thành từ B và hai trong số $n + 1$ điểm

$$A_0, A_1, A_2, ..., A_n$$

rồi lập dãy số (u_n).

a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 ;

b) Chứng minh rằng

$$u_n = C_{n+1}^2 \text{ và } u_{n+1} = u_n + n + 1.$$

2.8. Cho dãy số (u_n) thoả mãn điều kiện : Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì

$$0 < u_n < 1 \text{ và } u_{n+1} < 1 - \frac{1}{4u_n}.$$

Chứng minh dãy số đã cho là dãy giảm.