§2

2.1. a) -4 ; b) $+\infty$.

2.2. $$f(x) = \begin{cases} x^2 &, \text{ nếu } x \geq 0 \\ x^2 - 1, & \text{ nếu } x < 0. \end{cases}$$

a) (H.6) *Dự đoán :* Hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

b) Lấy hai dãy số có số hạng tổng quát là $a_n = \dfrac{1}{n}$ và $b_n = -\dfrac{1}{n}$.

Ta có, $a_n \to 0$ và $b_n \to 0$ khi $n \to +\infty$. (1)

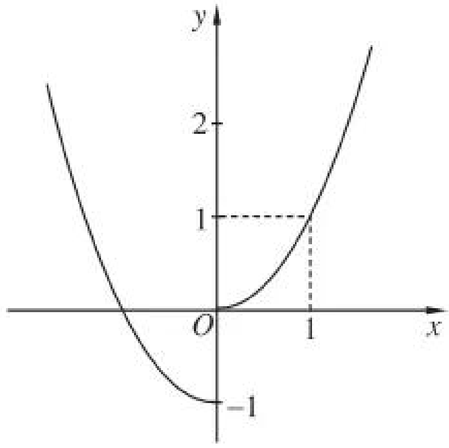
Vì $\frac{1}{n} > 0$ nên $\quad f(a_n) = \frac{1}{n^2}$.

Do đó, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. (2)

Vì , $-\frac{1}{n} < 0$ nên $f(b_n) = \frac{1}{n^2} - 1$.

Do đó, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = -1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.



Hình 6

2.3. a) Xét hai dãy số (a_n) với $a_n = 2n\pi$ và (b_n) với $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Ta có, $\lim a_n = \lim 2n\pi = +\infty$;

$$\lim b_n = \lim\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim n\left(\frac{\pi}{2n} + 2\pi\right) = +\infty \ ;$$

$$\lim \sin a_n = \lim \sin 2n\pi = \lim 0 = 0 \ ;$$

$$\lim \sin b_n = \lim \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim 1 = 1.$$

Như vậy, $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$, nhưng $\lim \sin a_n \neq \lim \sin b_n$. Do đó, theo định nghĩa, hàm số $y = \sin x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

2.4. Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = M$ nên $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = M$.

Do đó, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n).g(x_n) = L.M$.

Từ định nghĩa suy ra $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x).g(x) = L.M$.

2.5. a) 0 ; b) $-\infty$;

c) $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2-x+1}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{4-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty.$$

d) $$\lim_{x\to-\infty}(x^3+x^2+1)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=-\infty.$$

e) $-\infty$ và $+\infty$.

2.6. a) $$\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{1}{x-1}=\frac{-1}{4}.$$

b) $$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^3-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x-1)\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]}{x}=\lim_{x\to0}\left[(1+x)^2+(1+x)+1\right]=3.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=0.$$

d) $$\lim_{x\to5}\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}=\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$$

$$=\lim_{x\to5}\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)=2\sqrt{5}.$$

e) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}}{x}}=+\infty$$

(Vì $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{5}}{x}>0$ với mọi $x>0$).

f) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+5-9}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+5}+3}=\dfrac{-2}{3}.$

g) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x+3-4}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x}+1}=2.$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+3}{1-\dfrac{9}{x^3}}=3.$

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}.\left(\dfrac{-x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-1}{x^2+1}=-1.$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right).x^5\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^5}{x^7+x+3}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x}-2\right)^5}{1+\dfrac{1}{x^6}+\dfrac{3}{x^7}}=(-2)^5=-32.$

2.7. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}{1+\dfrac{2}{x}}=1$;

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{1+\frac{2}{x}}=-1.$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2-x+1})=\lim_{x\to+\infty}\left(x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-x+1)}{x-\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-1}{2}\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-1}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x}}-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{2}.$$

2.8. a) *Dự đoán :* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$;

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$.

b) • Ta có,

$$\lim_{x\to 1^+}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -1 < 0,\ \lim_{x\to 1^+}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$$

và $x^2 - 5x + 4 < 0$ với mọi $x \in (1 ; 4)$ nên

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = +\infty.$$

• Vì $\lim_{x\to 1^-}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -1 < 0,\ \lim_{x\to 1^-}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$

và $x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi $x < 1$ nên

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = -\infty.$$

• Vì $\lim_{x\to 4^+}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -16 < 0,\ \lim_{x\to 4^+}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$

và $x^2 - 5x + 4 > 0$ với mọi $x > 4$ nên

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = -\infty.$$

• Vì $\lim_{x\to 4^-}\left(2x^2 - 15x + 12\right) = -16 < 0,\ \lim_{x\to 4^-}\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0$

và $x^2 - 5x + 4 < 0$ với mọi $x \in (1 ; 4)$ nên

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = +\infty.$$

• $$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2 - \frac{15}{x} + \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2;$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2 - 15x + 12}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2 - \frac{15}{x} + \frac{12}{x^2}}{1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2.$$

2.9. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x^2+x+1} = 1.$$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(mx+2) = m+2.$

$f(x)$ có giới hạn khi $x \to 1 \Leftrightarrow m + 2 = 1 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

2.10. Vì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$ ta luôn có $\lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n) = +\infty$.

Từ định nghĩa suy ra $f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $f(x_n) > 1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại ít nhất một số $x_k \in K \setminus \{x_0\}$ sao cho $f(x_k) > 1$.

Đặt $c = x_k$, ta có $f(c) > 0$.

2.11. Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ ta luôn có $\lim\limits_{n\to +\infty} f(x_n) = -\infty$.

Do đó $\lim\limits_{n\to +\infty}\left[-f(x_n)\right] = +\infty$.

Theo định nghĩa suy ra $-f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 2 thì $-f(x_n) > 2$ kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại ít nhất một số $x_k \in (a\ ;+\infty)$ sao cho $-f(x_k) > 2$ hay $f(x_k) < -2 < 0$.

Đặt $c = x_k$, ta có $f(c) < 0$.