§2. Giới hạn của hàm số

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giới hạn hữu hạn

• Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0\ ;\ b)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ x_0)$.

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$ thì $\lim f(x_n) = L$.

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ a)$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$ thì $\lim f(x_n) = L$.

2. Giới hạn vô cực

Sau đây là hai trong số nhiều loại giới hạn vô cực khác nhau :

• Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $\lim f(x_n) = -\infty$.

• Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ khi và chỉ khi với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \to x_0$, ta có $\lim f(x_n) = +\infty$.

➢ **Nhận xét :** $f(x)$ có giới hạn $+\infty$ khi và chỉ khi $-f(x)$ có giới hạn $-\infty$.

3. Các giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

b) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$; c) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} c = c$; d) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{c}{x} = 0$ (c là hằng số).

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, với k nguyên dương.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$, nếu k là số lẻ ; g) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$, nếu k là số chẵn.

4. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$, thì

- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x)\right] = L + M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) - g(x)\right] = L - M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x).g(x)\right] = L.M$;
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \neq 0$) ;

b) Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

➢ **Chú ý :** Định lí 1 vẫn đúng khi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Định lí 2

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L.$

5. Quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tuỳ ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$).

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Cho hàm số $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}.$

Dùng định nghĩa chứng minh rằng $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5.$

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, $x_n \neq 1$ và $x_n \to 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 3}{x_n - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2(x_n - 1)(x_n + \frac{3}{2})}{x_n - 1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2(x_n + \frac{3}{2}) = 5. \text{ Do đó, } \lim_{x\to1} f(x) = 5.$$

• ***Ví dụ 2***

> Cho hàm số $$f(x) = \begin{cases} x & , \text{ nếu } x \geq 0 \\ 1 - x, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$
>
> Dùng định nghĩa chứng minh rằng hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Lấy dãy số (x_n) với $x_n = \frac{1}{n}$.

Ta có $x_n \to 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$ (1)

Lấy dãy số (y_n) với $y_n = -\frac{1}{n}$.

Ta có $y_n \to 0$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 - y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

➢ Nhận xét

Để dùng định nghĩa chứng minh hàm số $y = f(x)$ không có giới hạn khi $x \to x_0$, ta thường làm như sau :

• Chọn hai dãy số khác nhau (a_n) và (b_n) thoả mãn : a_n và b_n thuộc tập xác định của hàm số $y = f(x)$ và khác x_0 ; $a_n \to x_0$; $b_n \to x_0$;

• Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n)$ hoặc chứng minh một trong các giới hạn này không tồn tại.

➤ **Lưu ý :** Trường hợp $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$ hay $x \to \pm\infty$ chứng minh tương tự.

• ***Ví dụ 3***

Tính

a) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)$; b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+1}{x-2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2-x+1)$;

d) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}$; e) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}$.

Giải

a) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\sqrt{x^2+5}-1\right)=\sqrt{(-2)^2+5}-1=2$;

b) $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{3+1}{3-2}=4$;

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3+x^2-x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3(-1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3})=+\infty$.

d) Ta có $\lim\limits_{x\to4}(1-x)=-3<0$. (1)

$\lim\limits_{x\to4}(x-4)^2=0$ và $(x-4)^2>0$ với mọi $x\neq4$. (2)

Áp dụng quy tắc về giới hạn vô cực đối với thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{1-x}{(x-4)^2}=-\infty$.

e) Ta có $\lim\limits_{x\to3^-}(2x-1)=5>0$, $\lim\limits_{x\to3^-}(x-3)=0$ và $(x-3)<0$ với mọi $x<3$. Do đó, $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{2x-1}{x-3}=-\infty$.

➤ **Nhận xét**

Trong các ví dụ trên ta đã dùng trực tiếp các định lí về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương và căn của các hàm số hoặc các quy tắc về giới hạn vô cực.

• ***Ví dụ 4***

Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{\sqrt{x + 7} - 3}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1}$;

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x + 1} - 1\right)$;

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{4x^2 - x} + 2x)$.

Giải

a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{2(x - 1)(x + \frac{1}{2})} = \lim_{x \to 1} \frac{x + 3}{2x + 1} = \frac{4}{3}.$$

b) $$\lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{\sqrt{x + 7} - 3} = \lim_{x \to 2} \frac{(2 - x)\left(\sqrt{x + 7} + 3\right)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} -\left(\sqrt{x + 7} + 3\right) = -6.$$

c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 3x - 4}{-x^3 - x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}}{-1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^3}} = -2.$$

d) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{4x^2 + 1}}{2x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} - |x|\sqrt{4 + \dfrac{1}{x^2}}}{2x + 3}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + x\sqrt{4 + \dfrac{1}{x^2}}}{2x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}} + \sqrt{4 + \dfrac{1}{x^2}}}{2 + \dfrac{3}{x}} = \frac{1}{2}.$$

e) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x + 1} - 1\right) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - (x + 1)}{x(x + 1)} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{(x + 1)} = -1.$$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{4x^2-x}+2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(4x^2-x)-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}-2x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{|x|\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\dfrac{1}{x}}+2}=\frac{1}{4}.$$

➤ **Nhận xét**

Khi tính giới hạn mà không thể áp dụng trực tiếp định lí về giới hạn trong sách giáo khoa, ta phải biến đổi biểu thức xác định hàm số về dạng áp dụng được các định lí này.

Sau đây là một số cách biến đổi thường được dùng.

• *Tính* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=0$

– Phân tích tử và mẫu thành tích các nhân tử và giản ước. Cụ thể, ta biến đổi như sau :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{u(x)}{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)A(x)}{(x-x_0)B(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}\text{ và tính }\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)}{B(x)}.$$

– Nếu $u(x)$ hay $v(x)$ có chứa biến số dưới dấu căn thì có thể nhân tử và mẫu với biểu thức liên hợp, trước khi phân tích chúng thành tích để giản ước.

• *Tính* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{u(x)}{v(x)}$ *khi* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}u(x)=\pm\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}v(x)=\pm\infty$

– Chia tử và mẫu cho x^n với n là số mũ bậc cao nhất của biến số x (hay phân tích tử và mẫu thành tích chứa nhân tử x^n rồi giản ước).

– Nếu $u(x)$ hay $v(x)$ có chứa biến x trong dấu căn thức, thì đưa x^k ra ngoài dấu căn (với k là số mũ bậc cao nhất của x trong dấu căn), trước khi chia tử và mẫu cho luỹ thừa của x.

• *Tính* $\lim\limits_{x\to x_0}\left[u(x)-v(x)\right]$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=+\infty$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=+\infty$

hoặc $\lim\limits_{x\to x_0}u(x).v(x)$ *khi* $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$ *và* $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\pm\infty$.

Nhân và chia với biểu thức liên hợp (nếu có biểu thức chứa biến số dưới dấu căn thức) hoặc quy đồng mẫu để đưa về cùng một phân thức (nếu chứa nhiều phân thức).

C. BÀI TẬP

2.1. Dùng định nghĩa tìm các giới hạn

a) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x+3}{3-x}$;   b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.

2.2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, nếu } x \geq 0 \\ x^2 - 1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$

a) Vẽ đồ thị của hàm số $f(x)$. Từ đó dự đoán về giới hạn của $f(x)$ khi $x \to 0$.

b) Dùng định nghĩa chứng minh dự đoán trên.

2.3. a) Chứng minh rằng hàm số $y = \sin x$ không có giới hạn khi $x \to +\infty$.

b) Giải thích bằng đồ thị kết luận ở câu a).

2.4. Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ cùng xác định trên khoảng $(-\infty\ ;\ a)$. Dùng định nghĩa chứng minh rằng, nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = M$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x).g(x) = L.M$.

2.5. Tìm giới hạn của các hàm số sau :

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$ khi $x \to 3$;   b) $h(x) = \dfrac{2x^3 + 15}{(x+2)^2}$ khi $x \to -2$;

c) $k(x) = \sqrt{4x^2 - x + 1}$ khi $x \to -\infty$;   d) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ khi $x \to -\infty$;

e) $h(x) = \dfrac{x - 15}{x + 2}$ khi $x \to -2^+$ và khi $x \to -2^-$.

2.6. Tính các giới hạn sau :

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2 + 2x - 3}$;   b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x^2 - 1}$;   d) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x} - \sqrt{5}}$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-5}{\sqrt{x} + \sqrt{5}}$;   f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x+2}$;

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$;

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1-2x+3x^3}{x^3-9}$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-1\right)$;

j) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(x^2-1)(1-2x)^5}{x^7+x+3}$.

2.7. Tính giới hạn của các hàm số sau khi $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x+2}$;

b) $f(x)=x+\sqrt{x^2-x+1}$;

c) $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+1}$.

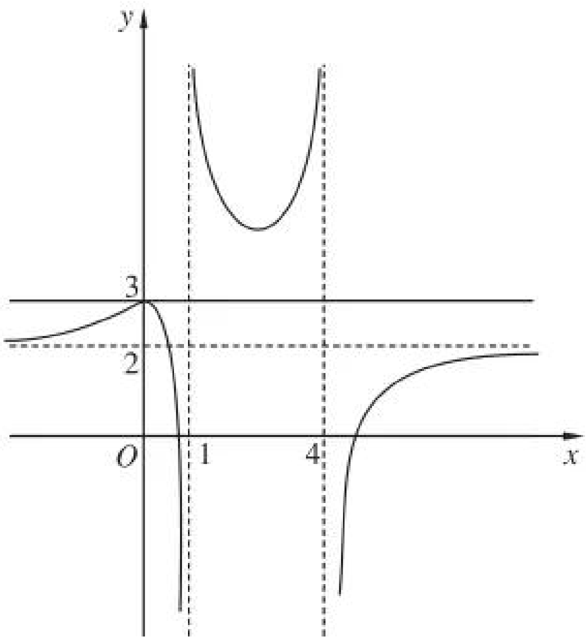
2.8. Cho hàm số

$$f(x)=\frac{2x^2-15x+12}{x^2-5x+4}$$

có đồ thị như hình 4.

a) Dựa vào đồ thị, dự đoán giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x\to 1^+$; $x\to 1^-$; $x\to 4^+$; $x\to 4^-$; $x\to+\infty$ và khi $x\to-\infty$.

b) Chứng minh dự đoán trên.



Hình 4

2.9. Cho hàm số

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}, & \text{nếu } x>1\\ mx+2, & \text{nếu } x\le 1.\end{cases}$$

Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to 1$? Tìm giới hạn này.

2.10. Cho khoảng K, $x_0\in K$ và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $K\setminus\{x_0\}$.

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ thì luôn tồn tại ít nhất một số c thuộc $K\setminus\{x_0\}$ sao cho $f(c)>0$.

2.11. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a\ ;\ +\infty)$.

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ thì luôn tồn tại ít nhất một số c thuộc $(a\ ;\ +\infty)$ sao cho $f(c) < 0$.