§2.

2.1. Có $6! = 720$ cách bày bánh kẹo.

2.2. Để xác định, các ghế được đánh số thứ tự từ 1 đến 10 tính từ trái sang phải.

a) Nếu các bạn nam ngồi ở các ghế ghi số lẻ thì các bạn nữ ngồi ở các ghế còn lại. Có 5! cách xếp bạn nam, 5! cách xếp bạn nữ. Tất cả có $(5!)^2$ cách xếp.

Nếu các bạn nam ngồi ở các ghế ghi số chẵn, các bạn nữ ngồi ở các ghế còn lại thì có $(5!)^2$ cách xếp nam và nữ. Vậy có tất cả $2 . (5!)^2$ cách xếp nam nữ ngồi xen kẽ nhau.

b) Các bạn nam được bố trí ngồi ở các ghế từ k đến k + 4, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Trong mỗi trường hợp có $(5!)^2$ cách xếp nam và nữ. Vậy có $6.(5!)^2$ cách xếp mà các bạn nam ngồi cạnh nhau.

2.3. a) Có 2 . 9 = 18 cách xếp chỗ cho An và Bình ngồi cạnh nhau, 8 bạn kia được xếp vào 8 chỗ còn lại. Vậy có 8! cách xếp 8 bạn còn lại và do đó có 18.8! cách xếp sao cho An, Bình ngồi cạnh nhau.

b) Có 10! cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn. Từ đó có 10! – 18.8! = 72.8! cách xếp chỗ cho 10 bạn mà An và Bình không ngồi cạnh nhau.

2.4. Để xác định, ba bạn được đánh số 1, 2, 3. Kí hiệu A_i là tập hợp các cách cho mượn mà bạn thứ i được thầy giáo cho mượn lại cuốn đã đọc lần trước ($i = 1, 2, 3$). Kí hiệu X là tập hợp các cách cho mượn lại. Theo bài ra cần tính

$$n\,[X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)].$$

Ta có $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) -$

$$- n(A_1 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$= 2! + 2! + 2! - 1 - 1 - 1 + 1 = 4,$$

$$n(X) = 3! = 6.$$

Từ đó $\quad n[X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)] = 6 - 4 = 2.$

2.5. a) Xếp hai người đàn bà ngồi cạnh nhau. Có 2 cách. Sau đó xếp đứa trẻ ngồi vào giữa. Có 1 cách. Xếp 4 người đàn ông vào 4 ghế còn lại. Có 4! cách. Theo quy tắc nhân, có 2 . 4! = 48 cách.

b) Đầu tiên chọn hai người đàn ông. Có C_4^2 cách. Xếp hai người đó ngồi cạnh nhau. Có 2 cách. Sau đó xếp đứa trẻ vào giữa. Có 1 cách. Xếp 4 người còn lại vào 4 ghế còn lại. Có 4! cách. Vậy theo quy tắc nhân, có $C_4^2.2.4! = 288$ cách.

2.6. a) Trong trường hợp này, số cách đặt bằng số các nghiệm (x_1, x_2, x_3) nguyên, không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 3$. Từ đó, đáp số cần tìm là $C_5^2 = 10$.

b) Quả thứ nhất có 3 cách đặt ;

Quả thứ hai có 3 cách đặt ;

Quả thứ ba có 3 cách đặt.

Vậy số cách đặt là $3^3 = 27$.

2.7. a) Chọn 7 người từ 10 người để lập một nhóm, ba người còn lại vào nhóm khác. Vậy số cách chia là C_{10}^7.

b) Tương tự, kết quả là $C_{10}^5.C_5^3$.

2.8. a) Có C_{10}^2 cách chọn hai quyển từ tầng thứ k, $k = 1, 2, 3, 4$. Vậy có tất cả $(C_{10}^2)^4$ cách chọn.

b) Tương tự, có $(C_{10}^8)^4 = (C_{10}^2)^4$ cách chọn.

2.9. Đầu tiên coi các quả là khác nhau. Do vậy có 9! cách chia. Nhưng các quả cùng loại (táo, cam, chuối) là giống nhau, nên nếu các cháu có cùng loại quả đổi cho nhau thì vẫn chỉ là một cách chia. Vì vậy, số cách chia là $\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$.

Có thể giải theo cách khác như sau :

Chọn 4 trong 9 cháu để phát táo. Có C_9^4 cách. Chọn 3 trong 5 cháu còn lại để phát cam. Có C_5^3 cách. Chuối sẽ phát cho hai cháu còn lại. Vậy có $C_9^4.C_5^3 = 1260$ cách.

2.10. Kí hiệu X là tập hợp các đoàn đại biểu, A, B lần lượt là tập các đoàn đại biểu gồm toàn nam và toàn nữ. Theo bài ra, cần tìm

$$n\,[X \setminus (A \cup B)] = n(X) - n(A \cup B) = n(X) - n(A) - n(B)$$

Ta có $\quad n(X) = C_9^4,\ n(A) = C_5^4,\ n(B) = C_4^4.$

Vậy $\quad n[X \setminus (A \cup B)] = C_9^4 - C_5^4 - C_4^4 = 120.$

2.11. a) Cứ ba điểm vẽ được một tam giác. Vì vậy có thể vẽ được $C_{10}^3 = 120$ tam giác.

b) Số đa giác vẽ được là tổng cộng của số tam giác, tứ giác, ngũ giác, ..., thập giác. Do đó vẽ được $C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6 + C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 968$ đa giác.

2.12. Số đoạn nối hai đỉnh của đa giác đã cho là C_{20}^2, số cạnh của đa giác là 20. Vậy số đường chéo là $C_{20}^2 - 20 = 170$.

2.13. Số tập con của tập hợp gồm bốn điểm là

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 16.$$

2.14. a) Xếp 6 nam vào 6 ghế cạnh nhau. Có 6! cách. Giữa các bạn nam có 5 khoảng trống cùng hai đầu dãy, nên có 7 chỗ có thể đặt ghế cho nữ. Bây giờ chọn 4 trong 7 vị trí để đặt ghế. Có C_7^4 cách. Xếp nữ vào 4 ghế đó. Có 4! cách. Vậy có 6!. C_7^4 . 4! = 120.7! cách xếp mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

b) Xếp 6 ghế quanh bàn tròn rồi xếp nam vào ngồi. Có 5! cách. Giữa hai nam có khoảng trống. Xếp 4 nữ vào 4 trong 6 khoảng trống đó. Có A_6^4 cách.

Theo quy tắc nhân, có 5! . A_6^4 = 43200 cách.

2.15. Ta có

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

$$C_n^{k+1} = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1}$$

$$\ldots$$

$$C_{k+2}^{k+1} = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}$$

Từ đó

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1}$$

$$= C_n^k + C_{n-1}^k + \ldots + C_{k+1}^k + C_k^k.$$

2.16. Ta có $A = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} C_k^1 + 2\sum_{k=2}^{n} C_k^2$. Kết hợp với bài tập 2.15, ta được

$$A = C_{n+1}^2 + 2C_{n+1}^3 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.17. a) *Cách thứ nhất*. Chọn 9 bạn trong 50 bạn để làm trực nhật. Có C_{50}^{9} cách.

Khi đã chọn được 9 bạn rồi, chọn 4 trong 9 bạn đó để quét sân. Có C_{9}^{4} cách.

Từ đó, theo quy tắc nhân, có $C_{50}^{9}.\,C_{9}^{4}$ cách phân công.

Cách thứ hai. Chọn 4 trong 50 bạn để quét sân, sau đó chọn 5 trong 46 bạn còn lại để xén cây. Vậy có $C_{50}^{4}.\,C_{46}^{5}$ cách phân công.

Từ đó ta có đẳng thức cần chứng minh.

b) Lập luận tương tự.

c) Ta có : 0! = 1 ; 2! = 2 ; 4! = 1.2.3.4 = 24.

Các số hạng 6! ; 8! ; ... ; 100! đều có tận cùng là chữ số 0. Do đó chữ số ở hàng đơn vị của S là 1 + 2 + 4 = 7.

2.18. Có thể chứng minh dễ dàng đẳng thức sau

$$rC_{n}^{r} = nC_{n-1}^{r-1} \qquad (r = 1, 2, ..., n - 1).$$

Vì n là số nguyên tố và $r < n$, nên n là ước của C_{n}^{r}.

2.19. Mỗi giao điểm của hai đường chéo ứng với một và chỉ một tập hợp gồm 4 điểm từ tập hợp 7 đỉnh của đa giác. Vậy có $C_{7}^{4} = 35$ giao điểm.

2.20. Có C_{10}^{5} cách chọn 5 chữ số khác nhau để lập số cần thiết. Nhưng khi đã có 5 chữ số khác nhau rồi, chỉ có một cách xếp 5 chữ số đó để tạo nên số cần thiết. Vậy có $C_{10}^{5} = 252$ số.