

§2. Hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$).

1. Kết quả của sự sắp xếp n phần tử của A theo một thứ tự nào đó được gọi là một *hoán vị* của tập hợp A .

Số các hoán vị của A được kí hiệu là P_n , ta có

$$P_n = n.(n - 1) \dots 2.1 = n!.$$

2. Kết quả của việc lấy k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) và xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp* chập k của n phần tử.

Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là A_n^k , ta có

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!} = n(n - 1) \dots (n - k + 1)$$

(ở đây, quy ước $0! = 1$).

3. Một tập con gồm k phần tử của A ($1 \leq k \leq n$) được gọi là một *tổ hợp* chập k của n phần tử. Tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

Số các tổ hợp chập k của n phần tử được kí hiệu là C_n^k , ta có

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Có bao nhiêu cách xếp bốn bạn A, B, C, D vào bốn chiếc ghế kê thành hàng ngang ?

Giải

Mỗi cách xếp cho ta một hoán vị của bốn bạn và ngược lại. Vậy số cách xếp là

$$P_4 = 4! = 24 \text{ (cách).}$$

• Ví dụ 2

Có bao nhiêu số nguyên dương gồm năm chữ số khác không và khác nhau (đôi một) ?

Giải

Mỗi số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$, trong đó $a_i \neq a_j$ với $i \neq j$ và

$$a_i \in \{1, 2, \dots, 9\}, i = 1, \dots, 5.$$

Như vậy, có thể coi mỗi số dạng trên là một chỉnh hợp chập 5 của 9 (chữ số). Do đó, số các số cần tìm là

$$A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 9.8.7.6.5 = 15120 \text{ (số).}$$

• Ví dụ 3

Cần phân công ba bạn từ một tổ có 10 bạn để làm trực nhật. Hỏi có bao nhiêu cách phân công khác nhau ?

Giải

Kết quả của sự phân công là một nhóm gồm ba bạn, tức là một tổ hợp chập 3 của 10 bạn. Vậy số cách phân công là

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120 \text{ (cách).}$$

• Ví dụ 4

Trong mặt phẳng có 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng khác cũng song song với nhau đồng thời cắt 6 đường thẳng đã cho. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo nên bởi 14 đường thẳng đã cho ?

Giải

Kí hiệu A và B lần lượt là tập hợp 6 đường thẳng song song với nhau và 8 đường thẳng song song cắt 6 đường thẳng đã cho.

Mỗi hình bình hành được tạo bởi hai đường thẳng của tập A và hai đường thẳng của tập B . Vậy số hình bình hành cần tìm là

$$C_6^2 \cdot C_8^2 = 15 \cdot 28 = 420 \text{ (hình).}$$

C. BÀI TẬP

- 2.1. Một cái khay tròn đựng bánh kẹo ngày Tết có 6 ngăn hình quạt màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách bày 6 loại bánh kẹo vào 6 ngăn đó ?
- 2.2. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ vào 10 ghế được kê thành hàng ngang, sao cho :
 - a) Nam và nữ ngồi xen kẽ nhau ?
 - b) Các bạn nam ngồi liền nhau ?
- 2.3. Có bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi cho 10 bạn, trong đó có An và Bình, vào 10 ghế kê thành hàng ngang, sao cho :
 - a) Hai bạn An và Bình ngồi cạnh nhau ?
 - b) Hai bạn An và Bình không ngồi cạnh nhau ?
- 2.4. Thầy giáo có ba quyển sách Toán khác nhau cho ba bạn mượn (mỗi bạn một quyển). Sang tuần sau thầy giáo thu lại và tiếp tục cho ba bạn mượn ba quyển đó. Hỏi có bao nhiêu cách cho mượn sách mà không bạn nào phải mượn quyển đã đọc ?
- 2.5. Bốn người đàn ông, hai người đàn bà và một đứa trẻ được xếp ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho :
 - a) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà ?
 - b) Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông ?
- 2.6. Ba quả cầu được đặt vào ba cái hộp khác nhau (không nhất thiết hộp nào cũng có quả cầu). Hỏi có bao nhiêu cách đặt, nếu
 - a) Các quả cầu giống hệt nhau (không phân biệt) ?
 - b) Các quả cầu đôi một khác nhau ?
- 2.7. Có bao nhiêu cách chia 10 người thành
 - a) Hai nhóm, một nhóm 7 người, nhóm kia 3 người ?
 - b) Ba nhóm tương ứng gồm 5, 3, 2 người ?

2.8. Một giá sách bốn tầng xếp 40 quyển sách khác nhau, mỗi tầng xếp 10 quyển. Hỏi có bao nhiêu cách chọn các quyển sách sao cho từ mỗi tầng có

a) Hai quyển sách ?

b) Tám quyển sách ?

2.9. Cô giáo chia 4 quả táo, 3 quả cam và 2 quả chuối cho 9 cháu (mỗi cháu một quả). Hỏi có bao nhiêu cách chia khác nhau ?

2.10. Một đoàn đại biểu gồm bốn học sinh được chọn từ một tổ gồm 5 nam và 4 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong đó có ít nhất một nam và ít nhất một nữ ?

2.11. Từ tập hợp gồm 10 điểm nằm trên một đường tròn :

a) Vẽ được bao nhiêu tam giác ?

b) Vẽ được bao nhiêu đa giác ?

2.12. Một đa giác lồi 20 cạnh có bao nhiêu đường chéo ?

2.13. Có bao nhiêu tập con của tập hợp gồm 4 điểm phân biệt ?

2.14. Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam ngồi vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu

a) Ghế sắp thành hàng ngang ?

b) Ghế sắp quanh một bàn tròn ?

2.15. Chứng minh rằng với $1 \leq k < n$,

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_{n-1}^k + \dots + C_{k+1}^k + C_k^k.$$

2.16. Sử dụng đồng nhất thức $k^2 = C_k^1 + 2C_k^2$ để chứng minh rằng

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n C_k^1 + 2 \sum_{k=2}^n C_k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.17. a) Một lớp có 50 học sinh. Tính số cách phân công 4 bạn quét sân trường và 5 bạn xén cây bằng hai phương pháp để rút ra đẳng thức

$$C_{50}^9 \cdot C_9^4 = C_{50}^4 \cdot C_{46}^5.$$

b) Chứng minh công thức Niu-tơn

$$C_n^r \cdot C_r^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{r-k} \quad (n \geq r \geq k \geq 0).$$

c) Tìm chữ số ở hàng đơn vị của tổng

$$S = 0! + 2! + 4! + 6! + \dots + 100!.$$

- 2.18.** Chứng minh rằng nếu n là số nguyên tố thì với $r = 1, 2, \dots, n - 1$, ta có C_n^r chia hết cho n .
- 2.19.** Trong một đa giác đều bảy cạnh, kẻ các đường chéo. Hỏi có bao nhiêu giao điểm của các đường chéo, trừ các đỉnh ?
- 2.20.** Tìm số các số nguyên dương gồm năm chữ số sao cho mỗi chữ số của số đó lớn hơn chữ số ở bên phải nó.