

## §2.

2.1. a)  $x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{4\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $x = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = 75^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

c)  $x = -80^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = 400^\circ + k720^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

d)  $x = \frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{2}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

2.2. a)  $x = -3 \pm \arccos\frac{1}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $x = 25^\circ + k120^\circ, x = 5^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

c)  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

d)  $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

2.3. a)  $x = -45^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

c)  $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

d)  $x = 300^\circ + k540^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

2.4. a) Điều kiện :  $\cos 3x \neq 1$ . Ta có

$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi$ . Do điều kiện, các giá trị  $k = 2m, m \in \mathbb{Z}$  bị loại, nên  $3x = (2m + 1)\pi, m \in \mathbb{Z}$ . Vậy nghiệm của phương trình là  $x = (2m + 1)\frac{\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$ .

b) Điều kiện :  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ . Biến đổi phương trình

$$\begin{aligned} \cos 2x \cdot \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 &\Rightarrow \cos 2x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do điều kiện, các giá trị  $x = \frac{\pi}{4} + 2m\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}$  bị loại. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{4} + (2m + 1)\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện :  $\cos(2x + 60^\circ) \neq 0$ . Ta có

$$\begin{aligned} \tan(2x + 60^\circ)\cos(x + 75^\circ) &= 0 \\ \Rightarrow \sin(2x + 60^\circ)\cos(x + 75^\circ) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \sin(2x + 60^\circ) = 0 \\ \cos(x + 75^\circ) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x + 60^\circ = k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x + 75^\circ = 90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x = 15^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Do điều kiện ở trên, các giá trị  $x = 15^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$  bị loại.

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = -30^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

d) Điều kiện :  $\sin x \neq 0$ . Ta có

$$\begin{aligned}
(\cot x + 1)\sin 3x = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cot x = -1 \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Do điều kiện  $\sin x \neq 0$  nên những giá trị  $x = k\frac{\pi}{3}$  với  $k = 3m, m \in \mathbb{Z}$  bị loại. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{và} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

2.5. a)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy các giá trị cần tìm là  $x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b)  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{13\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy các giá trị cần tìm là  $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{13\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$c) \tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{5}\right) \neq 0 \text{ và } \cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) \neq 0 & (1) \\ 2x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} - x + k\pi, k \in \mathbb{Z}. & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện (1). Vậy ta có  $x = k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

$$d) \cot 3x = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \neq 0 \text{ và } \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 & (3) \\ 3x = x + \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. & (4) \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu  $k = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$  thì các giá trị này không thoả mãn điều kiện (3).

Suy ra các giá trị cần tìm là  $x = \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$ .

$$2.6. a) \cos 3x - \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x = \sin 2x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pm\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm phương trình là  $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b) Điều kiện của phương trình :  $\cos x \neq 0$  và  $\cos 2x \neq 0$ .

$$\tan x \tan 2x = -1 \Rightarrow \sin x \sin 2x = -\cos x \cos 2x$$

$$\Rightarrow \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x = 0 \Rightarrow \cos x = 0.$$

Kết hợp với điều kiện, ta thấy phương trình vô nghiệm.

c)  $\sin 3x + \sin 5x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 4x \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là  $x = k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

d) Điều kiện :  $\sin 2x \neq 0$  và  $\sin 3x \neq 0$ .

$$\cot 2x \cot 3x = 1 \Rightarrow \cos 2x \cos 3x = \sin 2x \sin 3x$$

$$\Rightarrow \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x = 0$$

$$\Rightarrow \cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

Với  $k = 2 + 5m, m \in \mathbb{Z}$  thì

$$x = \frac{\pi}{10} + (2 + 5m)\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} + m\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Lúc đó  $\sin 2x = \sin(\pi + 2m\pi) = 0$ , không thỏa mãn điều kiện.

Có thể suy ra nghiệm phương trình là  $x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$  và  $k \neq 2 + 5m, m \in \mathbb{Z}$ .