

§2. Phương trình lượng giác cơ bản

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$ (1)

- $|a| > 1$: phương trình (1) vô nghiệm.
- $|a| \leq 1$: gọi α là một cung thoả mãn $\sin \alpha = a$. Khi đó phương trình (1) có các nghiệm là

$$\begin{aligned}x &= \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{và } x &= \pi - \alpha + k2\pi, & k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Nếu α thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arcsin a$.

Khi đó các nghiệm của phương trình (1) là

$$x = \arcsin a + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \arcsin a + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ$ có các nghiệm là

$$x = \beta^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

➤ **Chú ý.** Trong một công thức nghiệm, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

2. Phương trình $\cos x = a$ (2)

- $|a| > 1$: phương trình (2) vô nghiệm.
- $|a| \leq 1$: gọi α là một cung thoả mãn $\cos \alpha = a$. Khi đó phương trình (2) có các nghiệm là

$$x = \pm \alpha + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Nếu α thoả mãn điều kiện $0 \leq \alpha \leq \pi$ và $\cos \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$.
Khi đó nghiệm của phương trình (2) là

$$x = \pm \arccos a + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ$ có các nghiệm là

$$x = \pm \beta^\circ + k360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Phương trình $\tan x = a$ (3)

Điều kiện của phương trình (3) : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Nếu α thoả mãn điều kiện $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\tan \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \arctan a$.

Lúc đó nghiệm của phương trình (3) là

$$x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\tan x = \tan \beta^\circ$ có các nghiệm là

$$x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a$ (4)

Điều kiện của phương trình (4) là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Nếu α thoả mãn điều kiện $0 < \alpha < \pi$ và $\cot \alpha = a$ thì ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} a$.
Lúc đó nghiệm của phương trình (4) là

$$x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Phương trình $\cot x = \cot \beta^\circ$ có các nghiệm là

$$x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Giải các phương trình

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\sin x = \frac{1}{4}$;

c) $\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$;

d) $\sin 2x = -1$.

Giải

a) Vì $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Phương trình $\sin x = \frac{1}{4}$ có các nghiệm là

$$x = \arcsin \frac{1}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Ta có $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, nên

$$\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(x - 60^\circ) = \sin 30^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 60^\circ = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x - 60^\circ = 180^\circ - 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = 90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = 210^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

d) Ta có

$$\sin 2x = -1 \text{ (giá trị đặc biệt).}$$

Phương trình có nghiệm là

$$2x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{hay } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

• Ví dụ 2

Giải các phương trình

$$\text{a) } \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{b) } \cos(x - 2) = \frac{2}{5};$$

$$\text{c) } \cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2};$$

$$\text{d) } (1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0.$$

Giải

a) Vì $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{3\pi}{4}$ nên $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

b) $\cos(x - 2) = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x - 2 = \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Vì $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$ nên

$$\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x + 50^\circ) = \cos 60^\circ$$

$$\Leftrightarrow 2x + 50^\circ = \pm 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -50^\circ + 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -50^\circ - 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x = -55^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

d) Ta có

$$(1 + 2 \cos x)(3 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 \cos x = 0 \\ 3 - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3. \end{cases}$$

Phương trình $\cos x = -\frac{1}{2}$ có các nghiệm là

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

còn phương trình $\cos x = 3$ vô nghiệm.

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

• Ví dụ 3

Giải các phương trình

a) $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$;

b) $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

c) $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$;

d) $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0.$

Giải

a) $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{7} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

b) $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$

$$\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 3x = k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

c) $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

d) Điều kiện : $\sin \frac{x}{3} \neq 0$ và $\sin \frac{x}{2} \neq 0$. Khi đó ta có

$$\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot \frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

$$x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{và } x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

• **Ví dụ 4**

Giải các phương trình

a) $\sin 2x \cot x = 0$;

b) $\tan(x - 30^\circ) \cos(2x - 150^\circ) = 0$;

c) $(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$.

Giải

a) Điều kiện của phương trình $\sin 2x \cot x = 0$ (1)

là $\sin x \neq 0$.

Ta biến đổi phương trình đã cho

$$(1) \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình. Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

b) Điều kiện của phương trình

$$\tan(x - 30^\circ) \cos(2x - 150^\circ) = 0 \quad (2)$$

là $\cos(x - 30^\circ) \neq 0$.

Ta biến đổi phương trình đã cho

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \Leftrightarrow \frac{\sin(x - 30^\circ)}{\cos(x - 30^\circ)} \cdot \cos(2x - 150^\circ) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - 150^\circ = \pm 90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 240^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x = 120^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ x = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Khi thay vào điều kiện $\cos(x - 30^\circ) \neq 0$, ta thấy giá trị $x = 120^\circ + k180^\circ$ không thoả mãn, còn giá trị $x = 30^\circ + k180^\circ$ thoả mãn. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện của phương trình

$$(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0 \quad (3)$$

là $\cos x \neq 0$. Ta có

$$(3) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình, trong đó tập các giá trị $\left\{ \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập con của tập các giá trị $\left\{ \frac{5\pi}{6} + l\pi, l \in \mathbb{Z} \right\}$ (ứng với các giá trị l chẵn).

Vậy nghiệm của phương trình (3) là $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

và $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

• **Ví dụ 5**

Với những giá trị nào của x thì giá trị của các hàm số tương ứng sau bằng nhau ?

a) $y = \sin 3x$ và $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;

b) $y = \cos(2x + 1)$ và $y = \cos(x - 2)$;

c) $y = \tan 3x$ và $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$.

Giải

Trước hết, mở rộng công thức nghiệm của các phương trình lượng giác cơ bản, ta có các công thức sau. Với $u(x)$ và $v(x)$ là hai biểu thức của x thì

• $\sin u(x) = \sin v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) = v(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ u(x) = \pi - v(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

• $\cos u(x) = \cos v(x) \Leftrightarrow u(x) = \pm v(x) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $\tan u(x) = \tan v(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• $\cot u(x) = \cot v(x) \Rightarrow u(x) = v(x) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng các công thức mở rộng này cho các bài toán trong Ví dụ 5, ta có :

$$\text{a) } \sin 3x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy với $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$ hoặc $x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hai hàm số

$y = \sin 3x$ và $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ bằng nhau.

$$\text{b) } \cos(2x + 1) = \cos(x - 2) \Leftrightarrow 2x + 1 = \pm(x - 2) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x + 1 = -x + 2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vậy với $x = -3 + k2\pi$ hoặc $x = \frac{1}{3} + k\frac{2\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hai hàm số $y = \cos(2x + 1)$ và $y = \cos(x - 2)$ bằng nhau.

c) Điều kiện : $\cos 3x \neq 0$ và $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \neq 0$. Khi đó

$$\tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{3} - 2x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 5x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện đặt ra.

Vậy với $x = \frac{\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$ thì giá trị của hai hàm số $y = \tan 3x$ và $y = \tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ bằng nhau.

C. BÀI TẬP

2.1. Giải các phương trình

$$\text{a) } \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{b) } \sin(2x - 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{c) } \sin\left(\frac{x}{2} + 10^\circ\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\text{d) } \sin 4x = \frac{2}{3}.$$

2.2. Giải các phương trình

$$\text{a) } \cos(x + 3) = \frac{1}{3};$$

$$\text{b) } \cos(3x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{c) } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};$$

$$\text{d) } (2 + \cos x)(3 \cos 2x - 1) = 0.$$

2.3. Giải các phương trình

a) $\tan(2x + 45^\circ) = -1$;

b) $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$;

c) $\tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{8}$;

d) $\cot\left(\frac{x}{3} + 20^\circ\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.4. Giải các phương trình

a) $\frac{\sin 3x}{\cos 3x - 1} = 0$;

b) $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$;

c) $\tan(2x + 60^\circ)\cos(x + 75^\circ) = 0$;

d) $(\cot x + 1)\sin 3x = 0$.

2.5. Tìm những giá trị của x để giá trị của các hàm số tương ứng sau bằng nhau

a) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ và $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

b) $y = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$;

c) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{5}\right)$ và $y = \tan\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$;

d) $y = \cot 3x$ và $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

2.6. Giải các phương trình

a) $\cos 3x - \sin 2x = 0$;

b) $\tan x \tan 2x = -1$;

c) $\sin 3x + \sin 5x = 0$;

d) $\cot 2x \cot 3x = 1$.