

§2. Các quy tắc tính đạo hàm

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Công thức

$$(c)' = 0 \quad (c = \text{const}) ;$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}) ;$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

2. Phép toán

$$(U + V - W)' = U' + V' - W' ;$$

$$(UV)' = U'V + UV' ;$$

$$(kU)' = kU' \quad (k = \text{const}) ;$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} \quad (V \neq 0);$$

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}.$$

3. Đạo hàm của hàm hợp

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

B. VÍ DỤ

• **Ví dụ 1**

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x).$$

Giải

Áp dụng các công thức và phép toán đạo hàm ta được :

$$\begin{aligned} y' &= (4x^3 - 2x^2 - 5x)'(x^2 - 7x) + (4x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 7x)' \\ &= (12x^2 - 4x - 5)(x^2 - 7x) + (4x^3 - 2x^2 - 5x)(2x - 7) \\ &= 12x^4 - 84x^3 - 4x^3 + 28x^2 - 5x^2 + 35x + 8x^4 - 28x^3 - 4x^3 + 14x^2 - 10x^2 + 35x \\ &= 20x^4 - 120x^3 + 27x^2 + 70x. \end{aligned}$$

• **Ví dụ 2**

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1).$$

Giải

$$y' = \left(\frac{2}{x} + 3x\right)'(\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x\right)(\sqrt{x} - 1)'$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{2}{x^2} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x \right) \frac{1}{2\sqrt{x}}. \\ \text{Vậy } \quad y' &= \left(-\frac{2}{x^2} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

• **Ví dụ 3**

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^3 - 2}.$$

Giai

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm của một thương, ta được

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(-x^2 + 2x + 3)'(x^3 - 2) - (-x^2 + 2x + 3)(x^3 - 2)'}{(x^3 - 2)^2} \\ &= \frac{(-2x + 2)(x^3 - 2) - (-x^2 + 2x + 3).3x^2}{(x^3 - 2)^2} \\ &= \frac{-2x^4 + 2x^3 + 4x - 4 - (-3x^4 + 6x^3 + 9x^2)}{(x^3 - 2)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \quad y' = \frac{x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 4x - 4}{(x^3 - 2)^2}.$$

• **Ví dụ 4**

Tìm đạo hàm của hàm số

$$y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}.$$

Giai

$$y' = (x - 2)' \sqrt{x^2 + 1} + (x - 2) \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)' = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{(x - 2)(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\text{Suy ra } \quad y' = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{x(x - 2)}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

C. BÀI TẬP

Tìm đạo hàm của các hàm số sau (2.1 – 2.11) :

2.1. $y = x^5 - 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2}.$

2.2. $y = -9x^3 + 0,2x^2 - 0,14x + 5.$

2.3. $y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}.$

2.4. $y = -6\sqrt{x} + \frac{3}{x}.$

2.5. $y = (9 - 2x)(2x^3 - 9x^2 + 1).$

2.6. $y = \frac{2x - 3}{x + 4}.$

2.7. $y = \frac{5 - 3x - x^2}{x - 2}.$

2.8. $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)^2(x^4 + 1)^3.$

2.9. $y = x\sqrt{1+x^2}.$

2.10. $y = \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right)^4$ (a, b, c là các hằng số).

2.11. $y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1}.$

2.12. Rút gọn

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)} + 1 \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{x}+1} : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2} \right)^2$$

và tìm $f'(x)$.

2.13. Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Chứng minh rằng
 $f'(1) + f'(-1) = -4f(0)$.

2.14. Cho $f(x) = 2x^3 + x - \sqrt{2}$, $g(x) = 3x^2 + x + \sqrt{2}$.

Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

2.15. Cho $f(x) = 2x^3 - x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - \sqrt{3}$.

Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$.

- 2.16.** Cho hàm số $f(x) = x - 2\sqrt{x^2 + 12}$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$.
(Đề thi tốt nghiệp THPT 2010)

2.17. Giải các bất phương trình

a) $f'(x) > 0$ với $f(x) = \frac{1}{7}x^7 - \frac{9}{4}x^4 + 8x - 3$;

b) $g'(x) \leq 0$ với $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 2}$;

c) $\varphi'(x) < 0$ với $\varphi(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$.

2.18. Xác định m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$:

a) $f'(x) > 0$ với $f(x) = \frac{m}{3}x^3 - 3x^2 + mx - 5$;

b) $g'(x) < 0$ với $g(x) = \frac{m}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (m+1)x - 15$.

2.19. Cho $f(x) = \frac{2}{x}$, $g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. Giải bất phương trình $f(x) \leq g'(x)$.

2.20. Tính $f'(-1)$, biết rằng $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

2.21. Tính $g'(1)$, biết rằng $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2$.

2.22. Tính $h'(0)$, biết rằng $h(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$.

2.23. Tính $\varphi'(2)$, biết rằng $\varphi(x) = \frac{(x - 2)(8 - x)}{x^2}$.

2.24. Chứng minh rằng nếu $S(r)$ là diện tích hình tròn bán kính r thì $S'(r)$ là chu vi đường tròn đó.

2.25. Chứng minh rằng nếu $V(R)$ là thể tích hình cầu bán kính R thì $V'(R)$ là diện tích mặt cầu đó.

2.26. Giả sử V là thể tích hình trụ tròn xoay với chiều cao h và bán kính đáy r .
Chứng minh rằng với r là hằng số thì đạo hàm $V'(h)$ bằng diện tích đáy hình trụ và với h là hằng số thì đạo hàm $V'(r)$ bằng diện tích xung quanh của hình trụ.