§3.

3.1. a) Xét hiệu $H = u_{n+1} - u_n = 1 - 7(n+1) - (1 - 7n) = -7 < 0$, vậy dãy số giảm.

b) Do $u_{n+1} = u_n - 7$ nên dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = -6$; $d = -7$.

Công thức truy hồi là

$$\begin{cases} u_1 = -6 \\ u_{n+1} = u_n - 7 \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

c) $S_{100} = -35250$.

3.2. a) $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 1 - 3n + 1 = 3$.

Vì $u_{n+1} = u_n + 3$ nên dãy số (u_n) là cấp số cộng với $u_1 = 2$, $d = 3$.

b) $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} + 1 - 2^n - 1 = 2^n$. Vì 2^n không là hằng số nên dãy số (u_n) không phải là cấp số cộng.

c) Ta có $u_n = 2n + 1$.

Vì $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 1 - 2n - 1 = 2$, nên dãy đã cho là cấp số cộng với $u_1 = 3$; $d = 2$.

d) Để chứng tỏ (u_n) không phải là cấp số cộng, ta chỉ cần chỉ ra, chẳng hạn $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$ là đủ.

3.3. a) $u_1 = 8$, $d = -3$.

b) $u_1 = 1$, $d = 3$.

c) $u_1 = 36$, $d = -13$.

d) $u_1 = 3$, $d = 2$ hoặc $u_1 = -17$, $d = 2$.

3.4. ĐS : $n = 6$.

3.5. a) Ta có hệ $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275. & (2) \end{cases}$

Áp dụng công thức $u_1 + u_3 = 2u_2$ suy ra $u_2 = 9$ (3)

Thay $u_2 = 9$ vào (1) và (2) ta được hệ

$$\begin{cases} u_1 + u_3 = 18 \\ u_1^2 + u_3^2 = 194. \end{cases}$$

Từ đây tìm được $u_1 = 5, u_3 = 13$ hoặc $u_1 = 13, u_3 = 5$.

Vậy ta có hai cấp số cộng 5, 9, 13 và 13, 9, 5.

b) Ta có $b^2 = u_1^2 + (u_1 + d)^2 + ... + [u_1 + (n-1)d]^2$

$$= nu_1^2 + 2u_1d[1 + 2 + ... + (n-1)] + d^2[(1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2]$$

$$= nu_1^2 + n(n-1)u_1d + \frac{n(n-1)(2n-1)d^2}{6}. \quad (1)$$

Mặt khác, $a = nu_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$. (2)

Từ (2) tìm được u_1, thay u_1 vào (1) để tìm d.

Kết quả $d = \pm\sqrt{\frac{12(nb^2 - a^2)}{n^2(n^2 - 1)}}$;

$$u_1 = \frac{1}{n}\left[a - \frac{n(n-1)}{2}d\right].$$

3.6. Từ cấp số cộng α, β, γ với công sai $d = \frac{\pi}{3}$ suy ra

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{3}; \gamma = \beta + \frac{\pi}{3}.$$

Thay α, γ vào hệ thức và áp dụng công thức cộng cung.

3.7. Ta có $S_m = \frac{2u_1 + (m-1)d}{2}m$;

$$S_n = \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} n.$$

Theo giả thiết

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{[2u_1 + (m-1)d]m}{[2u_1 + (n-1)d]n} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Suy ra $(2u_1 - d)(m - n) = 0$ (với $m \neq n$).

Từ đó $$u_1 = \frac{d}{2}.$$

Vậy $$\frac{u_m}{u_n} = \frac{u_1 + (m-1)d}{u_1 + (n-1)d} = \frac{\frac{d}{2} + (m-1)d}{\frac{d}{2} + (n-1)d} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

3.8. a) Ta có $u_1 = 2$, $d = 5$, $S_n = 245$.

$$245 = \frac{n[2.2 + (n-1)5]}{2} \Leftrightarrow 5n^2 - n - 490 = 0.$$

Giải ra được $n = 10$.

Từ đó tìm được $x = u_{10} = 2 + 9.5 = 47$.

b) Xét cấp số cộng 1, 6, 11, ..., 96. Ta có

$$96 = 1 + (n-1)5 \Rightarrow n = 20.$$

Suy ra $$S_{20} = 1 + 6 + 11 + ... + 96 = \frac{20(1+96)}{2} = 970$$

và $$2x \,.\, 20 + 970 = 1010.$$

Từ đó $x = 1$.