

### §3. Cấp số cộng

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Định nghĩa

$(u_n)$  là cấp số cộng  $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d$ , với  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $d$  là hằng số. (1)

Hệ quả : Công sai  $d = u_{n+1} - u_n$ .

##### 2. Số hạng tổng quát

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \quad (n \geq 2). \quad (2)$$

$$d = \frac{u_n - u_1}{n - 1}. \quad (2')$$

##### 3. Tính chất

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \quad \text{với } k \geq 2 \quad (3)$$

hay  $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k. \quad (3')$

##### 4. Tổng $n$ số hạng đầu

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

hoặc  $S_n = \frac{n[2u_1 + (n - 1)d]}{2}. \quad (4')$

- **Lưu ý :** Khi giải các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là  $u_1$ ,  $d$ ,  $u_n$ ,  $n$ ,  $S_n$ . Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng đó thì sẽ tính được các đại lượng còn lại.

#### B. VÍ DỤ

• **Ví dụ 1**

Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 9 - 5n$ .

a) Viết 5 số hạng đầu của dãy ;

b) Chứng minh dãy số  $(u_n)$  là cấp số cộng. Chỉ rõ  $u_1$  và  $d$  ;

c) Tính tổng của 100 số hạng đầu.

### Giải

a) 4, -1, -6, -11, -16.

b) Xét hiệu  $u_{n+1} - u_n = 9 - 5(n+1) - 9 + 5n = -5$ ,

do đó  $u_{n+1} = u_n - 5$ , suy ra dãy số  $(u_n)$  là cấp số cộng với  $u_1 = 4$ ;  $d = -5$ .

c) Áp dụng công thức  $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$  (4')

ta có  $S_{100} = \frac{100[2 \cdot 4 + (100-1)(-5)]}{2} = -24\,350$ .

➤ **Chú ý** : Nếu sử dụng công thức (4) ta phải tính  $u_{100}$ .

#### • Ví dụ 2

a) Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được một cấp số cộng có tám số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.

b) Viết năm số xen giữa hai số 25 và 1 để được một cấp số cộng có bảy số hạng. Số hạng thứ 100 của cấp số này là bao nhiêu ?

### Giải

a) Ta có  $u_1 = 3$ ,  $u_8 = 24$ .

Từ công thức  $u_n = u_1 + (n-1)d$ , suy ra  $d = \frac{u_n - u_1}{n-1}$ .

Tìm được  $d = \frac{24-3}{8-1} = 3$ .

Vậy 6 số hạng cần viết thêm là 6, 9, 12, 15, 18, 21.

Tính tổng  $S_8 = \frac{8(3+24)}{2} = 108$ .

b) Ta có  $u_1 = 25$ ,  $u_7 = 1$ ,  $d = \frac{1-25}{7-1} = -4$ .

Vậy 5 số cần viết thêm là 21, 17, 13, 9, 5.

Tính  $u_{100} = 25 + 99 \cdot (-4) = -371$ .

#### • Ví dụ 3

Bốn số lập thành một cấp số cộng. Tổng của chúng bằng 22, tổng các bình phương của chúng bằng 166. Tìm bốn số đó.

### Giải

Giả sử cấp số cộng là  $u_1, u_2, u_3, u_4$ . Từ giả thiết và tính chất của cấp số cộng, ta có

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 22 & (1) \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 166 & (2) \\ u_1 + u_4 = u_2 + u_3 & (3) \end{cases}$$

Từ (1) và (3) có  $u_1 + u_4 = u_2 + u_3 = 11$ . (4)

Từ (2) và (4) suy ra  $u_1u_4 + u_2u_3 = 38$ . (5)

Biểu diễn  $u_2, u_3, u_4$  qua  $u_1$  và  $d$ , từ (4) và (5) ta có hệ

$$\begin{cases} 2u_1 + 3d = 11 \\ u_1^2 + 3u_1d + d^2 = 19. \end{cases}$$

Giải hệ trên bằng cách thế  $u_1 = \frac{11 - 3d}{2}$  vào phương trình thứ hai ta được

$$\frac{(11 - 3d)^2}{4} + \frac{3(11 - 3d)d}{2} + d^2 = 19$$

$$\Leftrightarrow 121 - 66d + 9d^2 + 66d - 18d^2 + 4d^2 = 76 \Leftrightarrow d = \pm 3.$$

Từ đây tìm được  $u_1 = 1$  hoặc  $u_1 = 10$ .

Kết quả có hai cấp số cộng :

$$1, 4, 7, 10 \text{ và } 10, 7, 4, 1.$$

#### • Ví dụ 4

Cho hai cấp số cộng

$$(x_n) : 4, 7, 10, 13, 16, \dots$$

$$(y_n) : 1, 6, 11, 16, 21, \dots$$

Hỏi trong 100 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số có bao nhiêu số hạng chung ?

### Giải

Ta có :  $x_n = 4 + (n - 1)3 = 3n + 1$  với  $1 \leq n \leq 100$ ,

$$y_k = 1 + (k - 1)5 = 5k - 4 \text{ với } 1 \leq k \leq 100.$$

Để một số là số hạng chung, ta phải có

$$3n + 1 = 5k - 4 \Leftrightarrow 3n = 5(k - 1)$$

suy ra  $n \vdots 5$ , tức  $n = 5t$  và  $k = 3t + 1$  ( $t \in \mathbb{Z}$ ).

Vì  $1 \leq n \leq 100$  nên  $1 \leq t \leq 20$ .

Ứng với 20 giá trị của  $t$ , ta tìm được 20 số hạng chung. Chẳng hạn, với  $t = 1$  thì  $n = 5$ ,  $k = 4$ , khi đó  $x_5 = y_4 = 16$ .

• **Ví dụ 5**

Chứng minh rằng ba số dương  $a, b, c$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng khi và chỉ khi các số  $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

**Giải**

Ta sẽ chứng minh bằng phép biến đổi tương đương.

Ba số  $\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$  lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} \\ \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \frac{\sqrt{c} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{a})} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = (\sqrt{c} - \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{b}) \\ \Leftrightarrow & b - a = c - b \Leftrightarrow a, b, c \text{ lập thành cấp số cộng.} \end{aligned}$$

• **Ví dụ 6**

Tìm  $x$  trong các cấp số cộng  $1, 6, 11, \dots$  và  $1, 4, 7, \dots$  biết :

a)  $1 + 6 + 11 + 16 + \dots + x = 970$  ;

b)  $(x + 1) + (x + 4) + \dots + (x + 28) = 155$ .

### Giải

a) Ta có cấp số cộng với  $u_1 = 1$ ,  $d = 5$ ,  $S_n = 970$  và  $u_n = x$ . Áp dụng

công thức  $S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$ , ta có

$$970 = \frac{n[2 + (n-1)5]}{2} \quad \text{hay} \quad 5n^2 - 3n - 1940 = 0.$$

Giải ra tìm được  $n = 20$ , suy ra  $x = u_{20} = 1 + 19 \cdot 5 = 96$ .

b) Ta có cấp số cộng với  $u_1 = x + 1$ ,  $d = 3$ ,  $u_n = x + 28$  và  $S_n = 155$ .

Áp dụng công thức  $u_n = u_1 + (n-1)d$ , ta có

$$x + 28 = x + 1 + (n-1)3, \text{ suy ra } n = 10.$$

Từ công thức  $S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$ , ta có  $155 = \frac{10(2x + 29)}{2}$ ,

từ đó tìm được  $x = 1$ .

#### • Ví dụ 7

Có thể có một tam giác mà số đo các cạnh và chu vi của nó lập thành một cấp số cộng được không ?

### Giải

Giả sử tồn tại một tam giác như vậy.

Gọi số đo các cạnh của tam giác là  $u_1, u_2, u_3$  và chu vi của nó là  $u_4$ , ta có  $u_1 = x - d, u_2 = x, u_3 = x + d, u_4 = 3x$ .

Theo tính chất của cấp số cộng thì  $u_1 + u_4 = u_2 + u_3$ ,

nhưng  $u_1 + u_4 = 4x - d, u_2 + u_3 = 2x + d$  nên  $4x - d = 2x + d$ , suy ra  $x = d$ .

Từ đó  $u_1 = 0$  (vô lí).

Vậy không thể có tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## C. BÀI TẬP

**3.1.** Cho dãy số  $(u_n)$  với  $u_n = 1 - 7n$ .

- Khảo sát tính tăng, giảm của dãy số ;
- Chứng minh dãy số trên là cấp số cộng. Lập công thức truy hồi của dãy số ;
- Tính tổng 100 số hạng đầu của dãy số.

**3.2.** Trong các dãy số  $(u_n)$  sau đây, dãy số nào là cấp số cộng ?

a)  $u_n = 3n - 1$  ;

b)  $u_n = 2^n + 1$  ;

c)  $u_n = (n + 1)^2 - n^2$  ;

d)  $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 1 - u_n. \end{cases}$

**3.3.** Tính số hạng đầu  $u_1$  và công sai  $d$  của cấp số cộng  $(u_n)$ , biết :

a)  $\begin{cases} u_1 + 2u_5 = 0 \\ S_4 = 14 ; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_7 = 19 ; \end{cases}$

c)  $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7 ; \end{cases}$

d)  $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

**3.4.** Tính số các số hạng của cấp số cộng  $(a_n)$ , nếu

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} = 126 \\ a_2 + a_{2n} = 42. \end{cases}$$

**3.5.** Tìm cấp số cộng  $(u_n)$ , biết

a)  $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 27 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 275 ; \end{cases}$

b)  $\begin{cases} u_1 + u_2 + \dots + u_n = a \\ u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = b^2. \end{cases}$

**3.6.** Cho ba góc  $\alpha, \beta, \gamma$  tạo thành một cấp số cộng theo thứ tự đó với công

sai  $d = \frac{\pi}{3}$ . Chứng minh :

a)  $\tan \alpha \cdot \tan \beta + \tan \beta \cdot \tan \gamma + \tan \gamma \cdot \tan \alpha = -3$  ;

b)  $4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma = \cos 3\beta$ .

**3.7.** Cho cấp số cộng  $(u_n)$ , chứng minh rằng nếu

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$$

thì  $\frac{u_m}{u_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$ .

**3.8.** Tìm  $x$  từ phương trình

a)  $2 + 7 + 12 + \dots + x = 245$ , biết  $2, 7, 12, \dots, x$  là cấp số cộng.

b)  $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010$ ,  
biết  $1, 6, 11, \dots$  là cấp số cộng.