

§3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x; & (\cos x)' &= -\sin x. \\ (\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}; & (\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Tìm đạo hàm của các hàm số

$$\text{a) } y = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan \sqrt{x};$$

$$\text{b) } y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \tan \frac{a}{x}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có } y' = 3\cos 3x - \frac{1}{5}\sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2 \sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có } y' &= (x^2 - 5x + 1)' \cos(x^2 - 5x + 1) + \frac{\left(\frac{a}{x}\right)'}{\cos^2 \frac{a}{x}} \\ &= (2x - 5) \cos(x^2 - 5x + 1) - \frac{a}{x^2 \cos^2 \frac{a}{x}}. \end{aligned}$$

• *Ví dụ 2*

Tìm đạo hàm của các hàm số

$$\text{a) } y = \sin \frac{1}{x^2} ;$$

$$\text{b) } y = \sqrt{x} \cot 2x ;$$

$$\text{c) } y = 3\sin^2 x \cos x + \cos^2 x.$$

Giải

$$\text{a) } y' = \left(\sin \frac{1}{x^2} \right)' = \left(\frac{1}{x^2} \right)' \cos \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{b) } y' = (\sqrt{x})' \cot 2x + \sqrt{x} (\cot 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cot 2x - \frac{2\sqrt{x}}{\sin^2 2x}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= 3(\sin^2 x)' \cos x + 3\sin^2 x (\cos x)' + (\cos^2 x)' \\ &= 6\sin x \cos^2 x - 3\sin^3 x - 2\cos x \sin x \\ &= \sin x (6\cos^2 x - 3\sin^2 x - 2\cos x). \end{aligned}$$

• **Ví dụ 3**

Chứng minh rằng

$$2f' \left(x + \frac{\pi}{3} \right) f' \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = f'(0) - f \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

với $f(x) = \cos x$.

Giải

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

Ta có

$$\begin{aligned} 2f' \left(x + \frac{\pi}{3} \right) f' \left(x - \frac{\pi}{6} \right) &= -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) \\ &= -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = -\sin \left(2x + \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -\sin \left(-2x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left(-2x + \frac{5\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 - \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= f'(0) - f\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP

Tìm đạo hàm của các hàm số sau (3.1 – 3.15) :

3.1. $y = \sqrt{\tan^3 x}$.

3.2. $y = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - 5x\right)}$.

3.3. $y = \frac{\sin x^2}{x}$.

3.4. $y = \cos \frac{x}{x+1}$.

3.5. $y = \tan^2 x - \cot x^2$.

3.6. $f(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin t}$ tại $t = \frac{\pi}{6}$.

3.7. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 0,1x^{10}$.

3.8. $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

3.9. $g(\varphi) = \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$.

3.10. $y = (1 + 3x + 5x^2)^4$.

3.11. $y = (3 - \sin x)^3$.

3.12. $y = \sin^2 3x + \frac{1}{\cos^2 x}$.

3.13. $y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$.

3.14. $y = \cot \sqrt{1 + x^2}$.

3.15. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

3.16. Cho $f(x) = 5x^2 - 16\sqrt{x} + 7$. Tính $f'(1), f'(4), f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

3.17. Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng

a) $f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$;

b) $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3} \right)$.

3.18. Giải các phương trình

a) $f'(x) = 0$ với $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2 \cos \frac{3\pi + x}{2}$;

b) $g'(x) = 0$ với $g(x) = \sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3} \sin x)$.

3.19. Giải phương trình $f'(x) = g(x)$

a) Với $f(x) = 1 - \sin^4 3x$ và $g(x) = \sin 6x$;

b) Với $f(x) = 4x \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right)$ và $g(x) = 8 \cos \frac{x}{2} - 3 - 2x \sin x$.

3.20. Chứng minh rằng $f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, nếu :

a) $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$;

b) $f(x) = \cos^6 x + 2\sin^4 x \cos^2 x + 3\sin^2 x \cos^4 x + \sin^4 x$;

c) $f(x) = \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(x + \frac{3\pi}{4} \right)$;

d) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} + x \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)$.

3.21. Tìm $f'(1), f'(2), f'(3)$ nếu

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

3.22. Tìm $f'(2)$ nếu

$$f(x) = x^2 \sin(x-2).$$

3.23. Cho $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

Với những giá trị nào của x thì :

a) $y'(x) = 0$;

b) $y'(x) = -2$;

c) $y'(x) = 10$?

Tìm đạo hàm của các hàm số sau (3.24 – 3.40) :

3.24. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

3.25. $y = (x - a)(x - b)$.

3.26. $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

3.27. $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$.

3.28. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

3.29. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

3.30. $y = (1 - x)(1 - x^2)^2(1 - x^3)^3$.

3.31. $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$.

3.32. $y = \frac{x}{(1 - x)^2(1 + x)^3}$.

3.33. $y = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$.

3.34. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

3.35. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

3.36. $y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x$.

3.37. $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$.

3.38. $y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$.

3.39. $y = \tan\frac{x}{2} - \cot\frac{x}{2}$.

3.40. $y = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x$.