§3

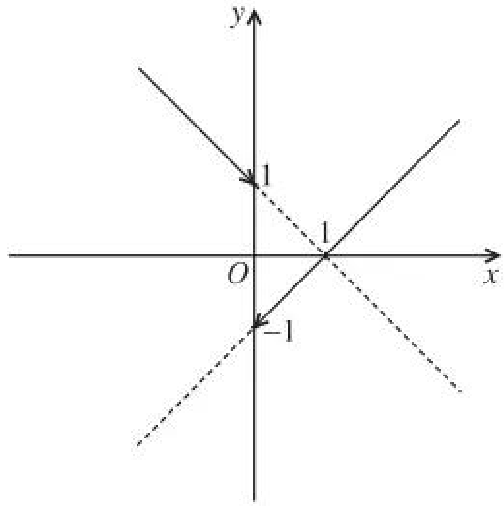
3.1. a) $f(x) = \dfrac{(x-1)|x|}{x} = \begin{cases} x-1, \text{ nếu } x>0 \\ 1-x, \text{ nếu } x<0. \end{cases}$

Hàm số này có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Từ đồ thị (H.7) dự đoán $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty ; 0)$, $(0 ; +\infty)$, nhưng không liên tục trên $\mathbb{R}$. Thật vậy,

– Với $x > 0$, $f(x) = x - 1$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục trên $(0 ; +\infty)$.

– Với $x < 0$, $f(x) = 1 - x$ cũng là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$, do đó liên tục trên $(-\infty ; 0)$.



Hình 7

Dễ thấy hàm số gián đoạn tại $x = 0$, vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

3.2. Xét hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ nếu } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x^2}\ , \text{ nếu } x>0. \end{cases}$

• *Trường hợp $x \le 0$.*

$f(x) = x + 2$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên nó liên tục trên $(-2 ; 0]$.

• *Trường hợp $x > 0$.*

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ là hàm số phân thức hữu tỉ nên liên tục trên $(0 ; 2)$ thuộc tập xác định của nó.

Như vậy $f(x)$ liên tục trên $(-2 ; 0]$ và trên $(0 ; 2)$.

Tuy nhiên, vì $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ nên hàm số $f(x)$ không có giới hạn hữu hạn tại $x = 0$. Do đó, nó không liên tục tại $x = 0$. Nghĩa là không liên tục trên $(-2 ; 2)$.

3.3. Vì hàm số liên tục trên $(a\ ;\ b]$ nên liên tục trên $(a\ ;\ b)$ và $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$. (1)

Vì hàm số liên tục trên $[b\ ;\ c)$ nên liên tục trên $(b\ ;\ c)$ và $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(a\ ;\ b)$, $(b\ ;\ c)$ và liên tục tại $x = b$ (vì $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$). Nghĩa là nó liên tục trên $(a\ ;\ c)$.

3.4. Đặt $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L$.

Suy ra $g(x)$ xác định trên $(a\ ;\ b) \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Mặt khác, $f(x) = f(x_0) + L(x - x_0) + (x - x_0)\, g(x)$ nên

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \left[f(x_0) + L(x - x_0) + (x - x_0)\, g(x)\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} L(x - x_0) + \lim_{x\to x_0} (x - x_0).\lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0).$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0.

3.5. a) Hàm số $f(x) = \sqrt{x+5}$ có tập xác định là $[-5\ ;\ +\infty)$. Do đó, nó xác định trên khoảng $(-5\ ;\ +\infty)$ chứa $x = 4$.

Vì $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} \sqrt{x+5} = 3 = f(4)$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 4$.

b) Hàm số $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}, & \text{nếu } x < 1 \\ -2x\quad, & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Ta có, $g(1) = -2$. (1)

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(\sqrt{2-x}+1)}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} (-\sqrt{2-x} - 1) = -2. \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2x) = -2. \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -2 = g(1)$. Vậy $g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

3.6. a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}, & \text{nếu } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}, & \text{nếu } x = \sqrt{2}. \end{cases}$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

• Nếu $x \neq \sqrt{2}$ thì $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}}$.

Đây là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục trên các khoảng $(-\infty\,;\,\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2}\,;\,+\infty)$.

• Tại $x = \sqrt{2}$:

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x - \sqrt{2}} = \lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{x - \sqrt{2}}$$

$= \lim\limits_{x \to \sqrt{2}} (x + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} = f(\sqrt{2})$. Vậy hàm số liên tục tại $x = \sqrt{2}$.

Kết luận : $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ 3, & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

• Nếu $x \neq 2$ thì $g(x) = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}$ là hàm phân thức hữu tỉ, nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty\,;\,2)$ và $(2\,;\,+\infty)$.

• Tại $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2} = -\infty$. Vậy hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại $x = 2$.

Kết luận : $y = g(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty\,;\,2)$ và $(2\,;\,+\infty)$, nhưng gián đoạn tại $x = 2$.

3.7. $m = 3$.

3.8. $m = \pm\dfrac{1}{2}$.

3.9. a) Xét $f(x) = x^5 - 3x - 7$ và hai số 0 ; 2.

b) Xét $f(x) = \cos 2x - 2\sin x + 2$ trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

c) Ta có, $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 4 \Leftrightarrow x^3 + 6x - 3 = 0$.

Hàm số $f(x) = x^3 + 6x - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục trên đoạn [0 ; 1]. (1)

Ta có $f(0)f(1) = -3.4 < 0$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $x^3 + 6x - 3 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc (0 ; 1).

Do đó, phương trình $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

3.10. *Hướng dẫn :* Xét $f(x) = x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ trên đoạn [–1 ; 1]. *Trả lời* : Có.

3.11. a) $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$.

$f(x) = (1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên [–2 ; –1].

Ta có $f(-1) = -1 < 0$ và $f(-2) = m^2 + 2 > 0$ nên $f(-1)f(-2) < 0$ với mọi m.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ luôn có ít nhất một nghiệm trong khoảng (–2 ; –1) với mọi m. Nghĩa là, phương trình $(1 - m^2)(x + 1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

b) $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$.

HD : Xét hàm số $f(x) = m(2\cos x - \sqrt{2}) - 2\sin 5x - 1$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

3.12. Hàm số $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ xác định trên $\mathbb{R}$.

• Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = +\infty.$$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \to +\infty$, ta luôn có $\lim f(x_n) = +\infty$.

Do đó, $f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $f(x_n) > 1$ kể từ một số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại số a sao cho $f(a) > 1$. (1)

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n)$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^n\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right) = -\infty \quad (\text{do } n \text{ lẻ}).$$

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ nên với dãy số (x_n) bất kì mà $x_n \to -\infty$, ta luôn có $\lim f(x_n) = -\infty$, hay $\lim\left[-f(x_n)\right] = +\infty$.

Do đó, $-f(x_n)$ có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Nếu số dương này là 1 thì $-f(x_n) > 1$ kể từ số hạng nào đó trở đi. Nói cách khác, luôn tồn tại b sao cho $-f(b) > 1$ hay $f(b) < -1$. (2)

• Từ (1) và (2) suy ra $f(a)\,f(b) < 0$.

Mặt khác, hàm đa thức $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên $[a\,;\,b]$.

Do đó, phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

3.13. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ và $f(a)f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm trong khoảng $(a\,;\,b)$.

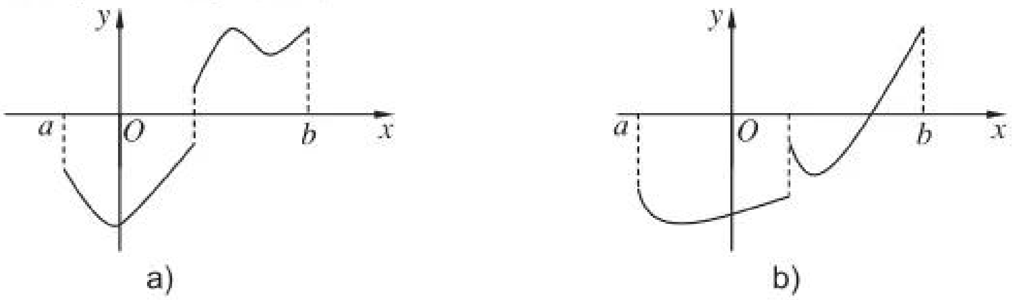
Ví dụ minh hoạ :

• $f(x) = x^2 - 1$ liên tục trên đoạn $[-2\,;\,2]$, $f(-2)f(2) = 9 > 0$. Phương trình $x^2 - 1 = 0$ có nghiệm $x = \pm 1$ trong khoảng $(-2\,;\,2)$.

• $f(x) = x^2 + 1$ liên tục trên đoạn $[-1\,;\,1]$ và $f(-1)f(1) = 4 > 0$. Còn phương trình $x^2 + 1 = 0$ lại vô nghiệm trong khoảng $(-1\,;\,1)$.

3.14. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a\,;\,b]$ nhưng $f(a)f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có thể có nghiệm hoặc vô nghiệm trong khoảng $(a\,;\,b)$.

Minh hoạ hình học (H.8) :



Hình 8

a) $f(x) = 0$ vô nghiệm trong $(a\ ;\ b)$; b) $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a\ ;\ b)$.