§3. Hàm số liên tục

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số liên tục

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

$y = f(x)$ *liên tục* tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
- $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ nếu nó liên tục trên khoảng (a ; b) và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.

➢ **Nhận xét :** Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

2. Các định lí

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó :

a) Các hàm số $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ và $f(x).g(x)$ cũng liên tục tại điểm x_0 ;

b) Hàm số $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0, nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lí 3

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a\ ;\ b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Mệnh đề tương đương :

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a\ ;\ b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(a\ ;\ b)$.

B. VÍ DỤ

• ***Ví dụ 1***

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x-1}, & \text{nếu } x \neq -1 \\ 2, & \text{nếu } x = -1 \end{cases}$

tại điểm $x = -1$.

Giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}$, chứa $x = -1$.

Ta có, $f(-1) = 2$ và $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+3}{x-1} = -1 \neq f(-1)$.

Do đó, hàm số không liên tục tại $x = -1$.

• ***Ví dụ 2***

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-3}, & \text{nếu } x \neq 3 \\ 5, & \text{nếu } x = 3 \end{cases}$

trên tập xác định của nó.

Giải

Tập xác định của $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

– Nếu $x \neq 3$ thì $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x-3}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 3)$ và $(3\ ;\ +\infty)$.

– Tại $x = 3$, ta có $f(3) = 5$,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+1) = 4 \neq f(3).$$

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x = 3$.

– Kết luận : Hàm số $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty\ ;\ 3)$, $(3\ ;\ +\infty)$, nhưng gián đoạn tại $x = 3$.

• ***Ví dụ 3***

Chứng minh rằng phương trình sau có ít nhất hai nghiệm :

$$2x^3 - 10x - 7 = 0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 10x - 7$.

Hàm số này là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó nó liên tục trên các đoạn $[-1\ ;\ 0]$ và $[0\ ;\ 3]$. (1)

Mặt khác, ta có :

$$f(-1) = 1\ ;\ f(0) = -7 \quad \text{và} \quad f(3) = 17.$$

Do đó $f(-1).f(0) < 0$ và $f(0).f(3) < 0$. (2)

Từ (1), (2) suy ra phương trình $2x^3 - 10x - 7 = 0$ có ít nhất hai nghiệm, một nghiệm thuộc khoảng $(-1\ ;\ 0)$, còn nghiệm kia thuộc khoảng $(0\ ;\ 3)$.

• ***Ví dụ 4***

Chứng minh rằng phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :

$$(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0.$$

Giải

Xét hàm số $f(x) = (1 - m^2)x^5 - 3x - 1$.

Vì $f(0) = -1 < 0$ và $f(-1) = m^2 + 1 > 0$ nên $f(-1)f(0) < 0$ với mọi m. (1)

Mặt khác, $f(x)$ là hàm đa thức, liên tục trên $\mathbb{R}$, nên liên tục trên đoạn $[-1 ; 0]$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1; 0)$, nghĩa là phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

➢ Nhận xét

Để chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm, chỉ cần tìm được hai số a và b sao cho :

$$f(a).f(b) < 0 \text{ và hàm số } f(x) \text{ liên tục trên đoạn } [a ; b].$$

Chú ý. Nếu phương trình chứa tham số, thì chọn a và b sao cho :

$f(a)$ và $f(b)$ không còn chứa tham số hay chứa tham số nhưng có dấu không đổi ; hoặc $f(a).f(b)$ chứa tham số nhưng tích $f(a).f(b)$ luôn âm.

C. BÀI TẬP

3.1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{(x-1)|x|}{x}$.

Vẽ đồ thị của hàm số này. Từ đồ thị dự đoán các khoảng trên đó hàm số liên tục và chứng minh dự đoán đó.

3.2. Cho ví dụ về một hàm số liên tục trên $(a ; b]$ và trên $(b ; c)$ nhưng không liên tục trên $(a ; c)$.

3.3. Chứng minh rằng nếu một hàm số liên tục trên $(a ; b]$ và trên $[b ; c)$ thì nó liên tục trên $(a ; c)$.

3.4. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a ; b)$ chứa điểm x_0.

Chứng minh rằng nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.

Hướng dẫn : Đặt $g(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - L$ và biểu diễn $f(x)$ qua $g(x)$.

3.5. Xét tính liên tục của các hàm số sau :

a) $f(x) = \sqrt{x+5}$ tại $x = 4$;

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}, & \text{nếu } x < 1 \\ -2x, & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ tại $x = 1$.

3.6. Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng :

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}, & \text{nếu } x \neq \sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}, & \text{nếu } x = \sqrt{2} \end{cases}$; b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{(x-2)^2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ 3, & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$

3.7. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & \text{nếu } x \neq 2 \\ m, & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

liên tục tại $x = 2$.

3.8. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2, & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$

liên tục trên $(0 ; +\infty)$.

3.9. Chứng minh rằng phương trình

a) $x^5 - 3x - 7 = 0$ luôn có nghiệm ;

b) $\cos 2x = 2\sin x - 2$ có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{6} ; \pi\right)$;

c) $\sqrt{x^3 + 6x + 1} - 2 = 0$ có nghiệm dương.

3.10. Phương trình $x^4 - 3x^3 + 1 = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(-1 ; 3)$?

3.11. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m :

a) $(1 - m^2)(x+1)^3 + x^2 - x - 3 = 0$;

b) $m(2\cos x - \sqrt{2}) = 2\sin 5x + 1$.

3.12. Chứng minh phương trình

$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ luôn có nghiệm với n là số tự nhiên lẻ.

3.13. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a ; b]$. Nếu $f(a).f(b) > 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(a ; b)$? Cho ví dụ minh hoạ.

3.14. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục trên đoạn $[a ; b]$ nhưng $f(a)f(b) < 0$, thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm hay không trong khoảng $(a ; b)$? Hãy giải thích câu trả lời bằng minh hoạ hình học.