§3.

3.1. a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) $\cos x \cos 2x = 1 + \sin x \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x = 1$

$\Leftrightarrow \cos 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

c) $4\sin x\cos x\cos 2x = -1 \quad \Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x = -1$

$\Leftrightarrow \sin 4x = -1 \Leftrightarrow 4x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

d) $\tan x = 3\cot x$. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

Ta có $\tan x = \dfrac{3}{\tan x} \Leftrightarrow \tan^2 x = 3 \Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình nên là nghiệm của phương trình đã cho.

3.2. a) $\sin x + 2\sin 3x = -\sin 5x \quad \Leftrightarrow \sin 5x + \sin x + 2\sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x\cos 2x + 2\sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 3x(\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 4\sin 3x\cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \cos x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

b) $\cos 5x\cos x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x) = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 4x \Leftrightarrow 6x = \pm 4x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k2\pi, \ k \in \mathbb{Z}\\ 10x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = k\dfrac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Tập $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ chứa trong tập $\left\{l\dfrac{\pi}{5}, l \in \mathbb{Z}\right\}$ (ứng với các giá trị l là bội số của 5) nên nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$

c) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x \Leftrightarrow \sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x - 2\sin x\sin 3x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0\\ \cos 4x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos^2 2x = 0$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -2$.

Phương trình vô nghiệm.

➢ **Chú ý.** Có thể nhận xét : Vế phải không dương với mọi x trong khi vế trái dương với mọi x nên phương trình đã cho vô nghiệm.

3.3. a) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3(1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x + 2\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(3\sin x + 5) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b) $5\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow 5(1 - \cos^2 x) + 3\cos x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow 5\cos^2 x - 3\cos x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + 1)(5\cos x - 8) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) $\sin^6 x + \cos^6 x = 4\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 4\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 4\cos^2 2x \quad \Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) = 4\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \frac{13}{4}\cos^2 2x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow 13\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) = 1$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x = \frac{2}{13} \Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{11}{13}$

$\Leftrightarrow 4x = \pm\arccos\left(-\frac{11}{13}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{11}{13}\right) + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

d) $-\frac{1}{4} + \sin^2 x = \cos^4 x \Leftrightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1-\cos 2x}{2} = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow -1 + 2 - 2\cos 2x = 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x + 4\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0\\ \cos 2x = -4 \text{ (vô nghiệm)}\end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

3.4. a) $2\tan x - 3\cot x - 2 = 0$. Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

Ta có $2\tan x - \frac{3}{\tan x} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 2\tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

b) $\cos^2 x = 3\sin 2x + 3$.

Ta thấy $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$1 = 6\tan x + 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 3\tan^2 x + 6\tan x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \tan x = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan\left(\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

c) $\cot x - \cot 2x = \tan x + 1$. (1)

Điều kiện : $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Khi đó,

$$(1) \quad \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{\cos x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos 2x = 2\sin^2 x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos 2x = \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện nên là nghiệm của phương trình.

3.5. a) $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2$.

Rõ ràng $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$1 + 2\tan x + 5\tan^2 x = 2(1 + \tan^2 x)$

$\Leftrightarrow 3\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\dfrac{1}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) $3\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x = 1$.

Với $\cos x = 0$ ta thấy hai vế đều bằng 1. Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Trường hợp $\cos x \neq 0$, chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được

$$3 - 4\tan x + \tan^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \Leftrightarrow 4\tan x = 2 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) $4\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 1$.

Rõ ràng $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$4 - 3\tan x + 3\tan^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0$.

Phương trình cuối vô nghiệm (đối với $\tan x$), do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

3.6. a) $2\cos x - \sin x = 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right) = 2.$$

Kí hiệu α là góc mà $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, ta được phương trình

$$\cos\alpha\cos x + \sin\alpha\sin x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = \cos\alpha \quad \Leftrightarrow x - \alpha = \pm\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\alpha + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = k2\pi,\quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) $\sin 5x + \cos 5x = -1 \quad \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x\right) = -1$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin 5x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 5x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{5} + k\frac{2\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

c) $8\cos^4 x - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x + \sin 4x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow 1 + \cos 4x + \sin 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x + \sin 4x = 1 \quad \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 4x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

d) $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 3\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}.\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1}{2}\sin 4x=0$

$\Leftrightarrow 8-3+3\cos 4x+4\sin 4x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos 4x+4\sin 4x=-5$

$\Leftrightarrow \frac{3}{5}\cos 4x+\frac{4}{5}\sin 4x=-1.$

Kí hiệu α là cung mà $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, ta được

$\sin\alpha\cos 4x+\cos\alpha\sin 4x=-1$

$\Leftrightarrow \sin(4x+\alpha)=-1$

$\Leftrightarrow 4x+\alpha=\frac{3\pi}{2}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$

3.7. a) $1+\sin x-\cos x-\sin 2x+2\cos 2x=0.$ (1)

Ta có :

$1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$;

$2\cos 2x=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\ =\ -2(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x).$

Vậy

(1) $\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1+\sin x-\cos x-2\sin x-2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\cos x)(1-\sin x-3\cos x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=\cos x\\ 3\cos x+\sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{10}}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\alpha\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

trong đó $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

b) $\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \dfrac{1}{\sin^2 x}$. (2)

Điều kiện : $\sin x \neq 0$. Khi đó,

(2) $\Leftrightarrow (\sin x - \sin^2 x) + \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(1 - \sin x) + \dfrac{1 - \sin x}{\sin^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(\sin^3 x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \sin x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (thoả mãn điều kiện).

c) $\cos x \tan 3x = \sin 5x$. (3)

Điều kiện : $\cos 3x \neq 0$. Khi đó,

(3) $\Leftrightarrow \cos x \sin 3x = \cos 3x \sin 5x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) = \dfrac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x)$

$\Leftrightarrow \sin 8x = \sin 4x$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = 4x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 8x = \pi - 4x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{12} + k\dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là

$$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}.$$

d) $2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0$. (4)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$. Khi đó,

(4) $\Leftrightarrow 2(\tan^2 x + \cot^2 x) + 3(\tan x + \cot x) + 2 = 0$.

$\Leftrightarrow 2\left[(\tan x + \cot x)^2 - 2\right] + 3(\tan x + \cot x) + 2 = 0$.

Đặt $t = \tan x + \cot x$ ta được phương trình

$2t^2 + 3t - 2 = 0 \quad \Rightarrow t = -2,\ t = \dfrac{1}{2}$.

Với $t = -2$ ta có $\tan x + \cot x = -2$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0 \Rightarrow \tan x = -1$

$\Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ (thoả mãn điều kiện).

Với $t = \frac{1}{2}$ ta có $\tan x + \cot x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\tan^2 x - \tan x + 2 = 0$.

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình (4) là $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

3.8. *Hướng dẫn*. Đối với những phương trình lượng giác chứa tan$x$, cot$x$, sin2x hoặc cos2x, ta có thể đưa về phương trình chứa cos$x$, sin$x$, sin2x hoặc cos2x, ngoài ra cũng có thể đặt ẩn phụ t = tan$x$ để đưa về một phương trình theo t.

Giải

Cách 1. Điều kiện của phương trình :

$$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq \pm 1. \qquad (1)$$

Ta có

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4\sin 2x - \frac{2}{\sin 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x.\cos x} + 4\sin 2x - \frac{2}{\sin 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} + 4\sin 2x - \frac{2}{\sin 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 4\sin^2 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\left(1 - \cos^2 2x\right) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 1 \text{ (loại)} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2. Đặt $t = \tan x$.

Điều kiện $t \neq 0$. (2)

Phương trình đã cho trở thành

$$\frac{1}{t} - t + 4.\frac{2t}{1+t^2} = \frac{1+t^2}{t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-t^2}{t} + \frac{8t}{1+t^2} - \frac{1+t^2}{t} = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - t^4 + 8t^2 - \left(1+t^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -2t^4 + 8t^2 - 2t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2\left(t^2 - 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (loại do (2))} \\ t = \pm\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \tan x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$