§3. Một số phương trình lượng giác thường gặp

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

Các phương trình dạng $at + b = 0$ $(a \neq 0)$, với t là một trong các hàm số lượng giác, là những phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

Sử dụng các phép biến đổi lượng giác, có thể đưa nhiều phương trình lượng giác về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Các phương trình dạng $at^2 + bt + c = 0$ $(a \neq 0)$, với t là một trong các hàm số lượng giác, là những phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác.

Có nhiều phương trình lượng giác có thể đưa về phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác bằng các phép biến đổi lượng giác. Một số dạng chính sẽ được nêu trong ví dụ.

3. Phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$

Xét phương trình

$$a\sin x + b\cos x = c. \qquad (1)$$

Biến đổi vế trái của phương trình (1) về dạng

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha),$$

trong đó $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

ta đưa phương trình (1) về phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác.

B. VÍ DỤ

• *Ví dụ 1*

Giải các phương trình

a) $\sin 2x - 2\cos x = 0$;

b) $8\cos 2x\sin 2x\cos 4x = \sqrt{2}$;

c) $\tan 2x - 2\tan x = 0$;

d) $2\cos^2 x + \cos 2x = 2$.

Giải

a) Ta có

$$\sin 2x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \sin x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Tập $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập con của tập $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$8\cos 2x \sin 2x \cos 4x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sin 4x \cos 4x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\sin 8x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện : $\cos 2x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$.

Ta có

$$\tan 2x - 2\tan x = 0 \Leftrightarrow \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} - 2\tan x = 0 \Leftrightarrow 2\tan x\left(\frac{1}{1-\tan^2 x} - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^3 x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có

$$2\cos^2 x + \cos 2x = 2 \Leftrightarrow 1 + 2\cos 2x = 2 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

• ***Ví dụ 2*** phương trình

a) $\cos 3x - \cos 4x + \cos 5x = 0$;

b) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$;

c) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x$;

d) $\cos 2x - \cos x = 2\sin^2 \frac{3x}{2}$.

Giải

a) $\cos 3x - \cos 4x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x + \cos 5x - \cos 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos 4x\cos x - \cos 4x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad \text{và} \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có

$\sin 7x - \sin 3x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x\sin 2x - \cos 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 5x(2\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 5x = 0\\ \sin 2x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 2x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{10} + k\dfrac{\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \dfrac{\pi}{12} + k\pi$ và $x = \dfrac{5\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) Ta có

$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x - \cos 4x - \sin 3x = 0$

$\Leftrightarrow \quad -2\sin 3x\sin(-x) - \sin 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3x(2\sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0\\ \sin x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\ ;\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ và } x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

d) Ta có

$$\cos 2x - \cos x = 2\sin^2\frac{3x}{2} \qquad \Leftrightarrow -2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} - 2\sin^2\frac{3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\sin\frac{3x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -2\sin\frac{3x}{2}.2\sin x\cos\frac{x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\dfrac{3x}{2} = 0\\ \sin x = 0\\ \cos\dfrac{x}{2} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3x}{2} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\dfrac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Tập $\{\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ là tập con của tập $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = k\dfrac{2\pi}{3}$ và $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

• *Ví dụ 3*

Giải các phương trình

a) $2\cos^2 2x + 3\sin^2 x = 2$;

b) $\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$;

c) $2 - \cos^2 x = \sin^4 x$;

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

Giải

a) Ta có

$$2\cos^2 2x + 3\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 3.\frac{1-\cos 2x}{2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x - 3\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 1\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ 2x = \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) Ta có

$$\cos 2x + 2\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x = 1 - \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2}\\ \cos x = -2.\end{array}\right.$$

Phương trình $\cos x = -2$ vô nghiệm, còn phương trình $\cos x = \frac{1}{2}$ có nghiệm

$x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

c) Ta có

$$2 - \cos^2 x = \sin^4 x \Leftrightarrow 2 - (1 - \sin^2 x) = \sin^4 x$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x - 1 = 0.$$

Đặt $t = \sin^2 x$, với điều kiện $0 \le t \le 1$, ta được phương trình $t^2 - t - 1 = 0.$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Vì $t_1 < 0, t_2 > 1$ nên hai giá trị này không thoả mãn điều kiện.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Ta có

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2.\frac{\sin^2 2x}{4} = \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -2.\end{array}\right.$$

Phương trình $\sin 2x = -2$ vô nghiệm, còn phương trình $\sin 2x = 1$ có nghiệm $2x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

• ***Ví dụ 4***

Giải các phương trình

a) $3\tan x + \sqrt{3}\cot x - 3 - \sqrt{3} = 0$;

b) $\dfrac{\sin^2 2x - 2}{\sin^2 2x - 4\cos^2 x} = \tan^2 x$;

c) $2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \dfrac{1}{\sin 2x}$.

Giải

a) $3\tan x + \sqrt{3}\cot x - 3 - \sqrt{3} = 0$ (1)

Điều kiện của phương trình (1) là $\cos x \neq 0$ và $\sin x \neq 0$.

$$(1) \quad \Leftrightarrow 3\tan x + \frac{\sqrt{3}}{\tan x} - 3 - \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^2 x - (3+\sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình (1). Vậy các nghiệm của phương trình (1) là

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ và } x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

b) $$\frac{\sin^2 2x - 2}{\sin^2 2x - 4\cos^2 x} = \tan^2 x. \qquad (2)$$

Điều kiện của phương trình (2) là $\cos x \neq 0$ và $\sin^2 2x - 4\cos^2 x \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}\sin^2 2x - 4\cos^2 x &= 4\sin^2 x\cos^2 x - 4\cos^2 x\\ &= 4\cos^2 x(\sin^2 x - 1) = -4\cos^4 x.\end{aligned}$$

Vì vậy $\sin^2 2x - 4\cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0$.

Do đó điều kiện của phương trình (2) là $\cos x \neq 0$. Theo biến đổi trên, ta có

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\sin^2 2x - 2}{-4\cos^4 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \sin^2 2x - 2 = -4\cos^2 x\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x = 2 \Leftrightarrow \sin 2x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Các giá trị này thoả mãn điều kiện của phương trình (2). Vậy nghiệm của phương trình (2) là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

c) $$2\tan x + \cot x = 2\sin 2x + \frac{1}{\sin 2x}. \qquad (3)$$

Điều kiện của phương trình (3) là $\sin x \neq 0$ và $\cos x \neq 0$. Ta có

$$\begin{aligned}2\tan x + \cot x &= \frac{2\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\\ &= \frac{2\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{\sin^2 x + 1}{\frac{1}{2}\sin 2x}.\end{aligned}$$

Do đó

$$(3) \Rightarrow \frac{2(\sin^2 x + 1)}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 2x + 1}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x - 2\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 2x) - (1 - \cos 2x) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\cos^2 2x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Các giá trị này đều thoả mãn điều kiện của phương trình (3). Vậy các nghiệm của phương trình (3) là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

• ***Ví dụ 5***

Giải các phương trình

a) $4\cos^2 x + 3\sin x\cos x - \sin^2 x = 3$;

b) $2\sin^2 x - \sin x\cos x - \cos^2 x = 2$;

c) $4\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 1$.

Giải

a) Với $\cos x = 0$ thì vế trái bằng -1 còn vế phải bằng 3 nên $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$4 + 3\tan x - \tan^2 x = 3(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow 4\tan^2 x - 3\tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \arctan\left(-\dfrac{1}{4}\right) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \text{ và } x=\arctan\left(-\frac{1}{4}\right)+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

b) Với $\cos x = 0$ ta thấy cả hai vế của phương trình bằng 2. Vậy $\cos x = 0$ thoả mãn phương trình, hay $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ là nghiệm.

Với $\cos x \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$2\tan^2 x - \tan x - 1 = 2(1+\tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan x = -3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arctan(-3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \arctan(-3) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Với $\cos x = 0$ thì vế trái bằng 4, còn vế phải bằng 1, nên $\cos x = 0$ không thoả mãn phương trình. Với $\cos x \neq 0$, chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$ ta được

$$4\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 1 + \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\tan^2 x - 4\tan x + 2 = 0.$$

Phương trình này vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

• ***Ví dụ 6***

Giải các phương trình

a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$;

b) $\cos 3x - \sin 3x = 1$;

c) $4\sin x + 3\cos x = 4(1+\tan x) - \dfrac{1}{\cos x}$.

Giải

a) Ta có

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2 \ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -1$$

$$\Leftrightarrow\ \sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = -1 \quad \Leftrightarrow\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \qquad \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có

$$\cos 3x - \sin 3x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos 3x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \qquad \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Vậy các nghiệm của phương trình là

$$x = k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$$

c) Điều kiện của phương trình là $\cos x \neq 0$.

Ta có

$$4\sin x + 3\cos x = 4(1 + \tan x) - \frac{1}{\cos x} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(4\sin x + 3\cos x) = 4(\sin x + \cos x) - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x(4\sin x + 3\cos x) - \cos x = 4\sin x + 3\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos x(4\sin x + 3\cos x - 1) = 4\sin x + 3\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(4\sin x + 3\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ 4\sin x + 3\cos x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = \frac{1}{5}. \end{array}\right. \qquad (2)$$

Kí hiệu α là cung mà $\sin\alpha = \dfrac{4}{5},\ \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ta được

$$(2) \quad \Leftrightarrow \cos(x-\alpha) = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = \pm\arccos\frac{1}{5} + k2\pi \ \Leftrightarrow x = \alpha \pm \arccos\frac{1}{5} + k2\pi.$$

Vậy các nghiệm của phương trình (1) là

$x = k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ và $x = \alpha \pm \arccos\dfrac{1}{5} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, trong đó $\alpha = \arccos\dfrac{3}{5}$.

• *Ví dụ 7*

Giải các phương trình :

a) $\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x - 2\cos 3x = 0$;

b) $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$.

Hướng dẫn : Biến đổi

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$,

hoặc $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\alpha)$, trong đó

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ và } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

Giải

a) Ta có

$$\sqrt{3}\cos 4x + \sin 4x - 2\cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right) = 2\cos 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos 3x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - \dfrac{\pi}{6} = 3x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 4x - \dfrac{\pi}{6} = -3x + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{42} + k\dfrac{2\pi}{7},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

b) Ta có

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2} \text{ (vô nghiệm)} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

C. BÀI TẬP

Giải các phương trình sau (3.1 – 3.7) :

3.1. a) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$; b) $\cos x\cos 2x = 1 + \sin x\sin 2x$;

c) $4\sin x\cos x\cos 2x = -1$; d) $\tan x = 3\cot x$.

3.2. a) $\sin x + 2\sin 3x = -\sin 5x$; b) $\cos 5x\cos x = \cos 4x$;

c) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$; d) $\sin^4 x + \cos^4 x = -\frac{1}{2}\cos^2 2x$.

3.3. a) $3\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$; b) $5\sin^2 x + 3\cos x + 3 = 0$;

c) $\sin^6 x + \cos^6 x = 4\cos^2 2x$; d) $-\frac{1}{4} + \sin^2 x = \cos^4 x$.

3.4. a) $2\tan x - 3\cot x - 2 = 0$; b) $\cos^2 x = 3\sin 2x + 3$;

c) $\cot x - \cot 2x = \tan x + 1$.

3.5. a) $\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 5\sin^2 x = 2$;

b) $3\cos^2 x - 2\sin 2x + \sin^2 x = 1$;

c) $4\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 1$.

3.6. a) $2\cos x - \sin x = 2$; b) $\sin 5x + \cos 5x = -1$;

c) $8\cos^4 x - 4\cos 2x + \sin 4x - 4 = 0$; d) $\sin^6 x + \cos^6 x + \frac{1}{2}\sin 4x = 0$.

3.7. a) $1 + \sin x - \cos x - \sin 2x + 2\cos 2x = 0$;

b) $\sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x - \frac{1}{\sin^2 x}$;

c) $\cos x\tan 3x = \sin 5x$;

d) $2\tan^2 x + 3\tan x + 2\cot^2 x + 3\cot x + 2 = 0$.

3.8. Giải phương trình

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}.$$