

§4.

4.1. a) Có thể lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Cấp số nhân có $u_1 = -3, q = 9$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned}H &= u_{n+1} - u_n = (-3)^{2n+1} - (-3)^{2n-1} \\ &= (-3)^{2n} [(-3)^1 - (-3)^{-1}] = 9^n \left(-\frac{8}{3}\right) < 0, \text{ vậy dãy số giảm.}\end{aligned}$$

b) Công thức truy hồi

$$\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = 9.u_n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

c) Số hạng thứ năm.

4.2. ĐS : a) $u_1 = 3, q = 2.$

b) $n = 10.$

c) $n = 13.$

4.3. ĐS : a) $n = 6.$

b) $n = 5.$

4.4. a) Ta có hệ
$$\begin{cases} u_1 q^4 - u_1 = 15 \\ u_1 q^3 - u_1 q = 6 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u_1 (q^4 - 1) = 15 \\ u_1 (q^3 - q) = 6. \end{cases} \quad (1)$$

Do (1) nên $q \neq \pm 1$, suy ra $\frac{15}{6} = \frac{q^4 - 1}{q(q^2 - 1)} = \frac{q^2 + 1}{q}.$

Biến đổi về phương trình $2q^2 - 5q + 2 = 0.$

Giải ra được $q = 2$ và $q = \frac{1}{2}.$

Nếu $q = 2$ thì $u_1 = 1.$

Nếu $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = -16.$

b) ĐS : $u_1 = 1, q = 2.$

4.5. HD : Gọi 4 số cần tìm là x, y, z, t , ta có :

Cấp số cộng x, y, z, t

Cấp số nhân $x - 2, y - 6, z - 7, t - 2.$

Ta có hệ
$$\begin{cases} x + z = 2y \\ y + t = 2z \\ (y - 6)^2 = (x - 2)(z - 7) \\ (z - 7)^2 = (y - 6)(t - 2). \end{cases}$$

ĐS : $x = 5, y = 12, z = 19, t = 26.$

4.6. ĐS : 10, 20, 40, 80.

4.7. Từ giả thiết có

$$u_{n+1}(u_n + 4) = 2u_n + 3 \text{ hay } u_{n+1} \cdot u_n + 4u_{n+1} = 2u_n + 3. \quad (1)$$

Lập tỉ số
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} \cdot \frac{u_n + 3}{u_n - 1} = \frac{u_{n+1}u_n + 3u_{n+1} - u_n - 3}{u_{n+1}u_n - u_{n+1} + 3u_n - 3}. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $u_{n+1} \cdot u_n = 2u_n + 3 - 4u_{n+1}$, thay vào (2) ta được

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2u_n + 3 - 4u_{n+1} + 3u_{n+1} - u_n - 3}{2u_n + 3 - 4u_{n+1} - u_{n+1} + 3u_n - 3} = \frac{u_n - u_{n+1}}{5(u_n - u_{n+1})} = \frac{1}{5}.$$

Vậy $x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n$, ta có cấp số nhân (x_n) với $q = \frac{1}{5}$ và $x_1 = -\frac{1}{3}$.

Ta có
$$x_n = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}. \quad (3)$$

Từ đó tìm được
$$u_n = \frac{3x_n - 1}{1 - x_n} = \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}} = -\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 1}.$$

4.8. HD : Làm tương tự Ví dụ 7.

ĐS : Ba số phải tìm là 2, 14, 98.

4.9. a) Biến đổi vế trái

$$\begin{aligned} a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) &= \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c} \\ &= \frac{acc^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{b} + \frac{a^2ac}{c} \\ &= a^3 + b^3 + c^3. \end{aligned}$$

b) HD : Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho các số a, b, c và b, c, d .

4.10. HD : Thay các hệ số a, b, c, d lần lượt bằng a, aq, aq^2, aq^3 vào phương trình và biến đổi.