

4. Cấp số nhân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n q$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Hệ quả : Công bội $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. Số hạng tổng quát

$$u_n = u_1 q^{n-1}.$$

3. Tính chất

$$\begin{aligned} u_k^2 &= u_{k-1} u_{k+1} \\ \text{hay } |u_k| &= \sqrt{u_{k-1} u_{k+1}} \quad (k \geq 2). \end{aligned}$$

4. Tổng n số hạng đầu tiên

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

➤ **Lưu ý** : Khi giải các bài toán về cấp số nhân, ta thường gặp 5 đại lượng. Đó là u_1, q, n, u_n, S_n . Cần phải biết ít nhất 3 trong 5 đại lượng trên thì có thể tính được các đại lượng còn lại.

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Cho các dãy số (u_n) sau

a) $u_n = (-5)^{2n+1}$;

b) $u_n = (-1)^n \cdot 3^{3n+1}$;

c) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \text{ với } n \geq 1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}u_n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Dãy số nào là cấp số nhân ? Tìm công thức truy hồi của các dãy số a), b).

Giải

a) Lập tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-5)^{2(n+1)+1}}{(-5)^{2n+1}} = 25$.

Vậy dãy số là cấp số nhân với $u_1 = -125, q = 25$.

Công thức truy hồi là
$$\begin{cases} u_1 = -125 \\ u_{n+1} = 25u_n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

b) Làm tương tự như trên, ta có dãy số b) là cấp số nhân với $u_1 = -81, q = -27$.

Công thức truy hồi là
$$\begin{cases} u_1 = -81 \\ u_{n+1} = -27u_n \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

c) Tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ không phải là hằng số nên dãy số c) không phải là cấp số nhân.

d) Từ $u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}u_n = \frac{7}{5}u_n$, suy ra dãy số d) là cấp số nhân với $u_1 = 1, q = \frac{7}{5}$.

• **Ví dụ 2**

Dãy số (u_n) được cho như sau

$$\begin{cases} u_1 = 2004, u_2 = 2005 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + u_{n-1}}{3} \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

a) Lập dãy (v_n) với $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Chứng minh dãy (v_n) là cấp số nhân.

b) Lập công thức tính u_n theo n .

Giải

a) Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} 3u_{n+1} &= 2u_n + u_{n-1} \\ \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n &= -\frac{1}{3}(u_n - u_{n-1}) \\ \Leftrightarrow v_n &= -\frac{1}{3}v_{n-1}. \end{aligned}$$

Vậy (v_n) là cấp số nhân, có $q = -\frac{1}{3}$ và $v_1 = 1$.

b) Để tính u_n , ta viết

$$\begin{aligned} u_n &= (u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \dots + (u_2 - u_1) + u_1 \\ &= v_{n-1} + v_{n-2} + \dots + v_1 + u_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2004 + 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = 2004 + \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] \\
&= 2004 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

• **Ví dụ 3**

- a) Viết năm số xen giữa các số 1 và 729 để được một cấp số nhân có bảy số hạng. Tính tổng các số hạng của cấp số này.
- b) Viết sáu số xen giữa các số -2 và 256 để được một cấp số nhân có tám số hạng.
- Nếu viết tiếp thì số hạng thứ 15 là bao nhiêu ?

Giải

a) Ta có $u_1 = 1, \quad u_7 = 729.$

Vì $u_7 = u_1 \cdot q^6$ nên $q^6 = \frac{u_7}{u_1} = 729 = 3^6$, suy ra $q = \pm 3.$

Năm số cần viết là 3, 9, 27, 81, 243 hoặc $-3, 9, -27, 81, -243.$

Với $q = 3$ ta có $S_7 = \frac{1 \cdot (3^7 - 1)}{3 - 1} = 1093.$ Với $q = -3$ ta có $S_7 = 547.$

b) Ta có $u_1 = -2, \quad u_8 = 256.$

Mặt khác, $q^7 = \frac{u_8}{u_1} = \frac{256}{-2} = -128 = (-2)^7$, suy ra $q = -2.$

Sáu số cần viết là 4, $-8, 16, -32, 64, -128.$

$u_{15} = -2 \cdot (-2)^{14} = -32768.$

• **Ví dụ 4**

Cho cấp số nhân $a, b, c, d.$ Chứng minh rằng

a) $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2 ;$

b) $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2.$

Giải

Ta có $b^2 = ac$; $c^2 = bd$; $ad = bc$.

a) Biến đổi vế trái

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = b^2 + c^2 - 2bc + c^2 + a^2 + d^2 - 2bd + b^2 \\ = a^2 - 2ad + d^2 = (a-d)^2.$$

$$\text{b) } (a+b+c)(a-b+c) = (a+c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 \\ = a^2 + c^2 + 2b^2 - b^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

• Ví dụ 5

Tìm cấp số nhân (u_n) , biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_5 + u_6 + u_7 + u_8 = 480 \end{cases} \quad (1) \quad \text{b) } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases} \quad (2)$$

Giải

$$\text{a) } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 = 30 \\ u_5 + u_5q + u_5q^2 + u_5q^3 = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q + q^2 + q^3) = 30 \\ u_5(1 + q + q^2 + q^3) = 480. \end{cases}$$

$$\text{Từ đây có } \frac{u_5}{u_1} = 16 \Leftrightarrow \frac{u_1q^4}{u_1} = 16 \Leftrightarrow q^4 = 16 \Leftrightarrow q = \pm 2.$$

Hai giá trị tương ứng của u_1 sẽ là 2 và -6.

Vậy có hai cấp số nhân cần tìm

$$u_1 = 2 ; q = 2 \text{ và } u_1 = -6 ; q = -2.$$

b) Ta thấy $q \neq 1$. Khi đó,

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 15 \\ \frac{u_1^2(q^8 - 1)}{q^2 - 1} = 85 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1^2(q^4 - 1)^2}{(q - 1)^2} = 225 \\ \frac{u_1^2(q^8 - 1)}{q^2 - 1} = 85. \end{cases}$$

Chia từng vế của hai phương trình, ta được

$$\frac{(q^4 - 1)^2(q^2 - 1)}{(q - 1)^2(q^8 - 1)} = \frac{225}{85} \Leftrightarrow \frac{(q + 1)^2(q^2 + 1)}{q^4 + 1} = \frac{45}{17} \\ \Leftrightarrow 14q^4 - 17q^3 - 17q^2 - 17q + 14 = 0.$$

Chia hai vế của phương trình cho q^2 và đặt $x = q + \frac{1}{q}$, ta có

$$14x^2 - 17x - 45 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} ; x_2 = -\frac{9}{7}.$$

Ta có hai phương trình

$$q + \frac{1}{q} = -\frac{9}{7} \text{ (vô nghiệm) và } q + \frac{1}{q} = \frac{5}{2}.$$

Giải phương trình này tìm được $q = 2, q = \frac{1}{2}$. Tương ứng có $u_1 = 1, u_1 = 8$.

Vậy, ta có hai cấp số nhân

$$1, 2, 4, 8, \dots (u_1 = 1, q = 2)$$

và $8, 4, 2, 1, \dots (u_1 = 8, q = \frac{1}{2}).$

• **Ví dụ 6**

Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng. Các số hạng thứ nhất đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của cấp số nhân và cấp số cộng là $\frac{9}{5}$. Tìm hai cấp số ấy.

Giải

Nếu có cấp số cộng 3, u_2, u_3 thì cấp số nhân là

$$3, u_2, \frac{9u_3}{5}.$$

Theo tính chất của các cấp số, ta có

$$u_2 = \frac{3 + u_3}{2} \text{ và } u_2^2 = 3 \cdot \frac{9u_3}{5}$$

hay $\left(\frac{3 + u_3}{2}\right)^2 = \frac{27u_3}{5}$. Biến đổi đưa về phương trình

$$5u_3^2 - 78u_3 + 45 = 0 \quad (u_3 > 3).$$

Giải ra ta có $u_3 = 15$. Vậy các cấp số cần tìm là :

Cấp số cộng 3, 9, 15.

Cấp số nhân 3, 9, 27.

• **Ví dụ 7**

Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một cấp số cộng, ba số sau lập thành một cấp số nhân. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36, tìm bốn số đó.

Giải

Gọi bốn số phải tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 , ta có

Cấp số cộng $u_2 - d, u_2, u_2 + d$

và cấp số nhân u_2, u_2q, u_2q^2 .

Theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} 2u_2 + d = u_2(1 + q) = 36 & (1) \\ u_2 - d + u_2q^2 = 37. & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra

$$u_2 = \frac{36 - d}{2} = \frac{36}{1 + q} \Rightarrow d = 36 - \frac{72}{1 + q}. \quad (3)$$

Từ (2) suy ra

$$u_2 = \frac{37 + d}{1 + q^2}, \text{ do đó } \frac{37 + d}{1 + q^2} = \frac{36}{1 + q}. \quad (4)$$

Thay d ở (3) vào hệ thức (4) và rút gọn, ta được phương trình

$$36q^2 - 73q + 35 = 0.$$

Giải ra được $q = \frac{5}{4}, q = \frac{7}{9}$.

Vậy, với $q = \frac{5}{4}$ thì

$$u_2 = \frac{36}{1 + \frac{5}{4}} = 16, u_3 = 16 \cdot \frac{5}{4} = 20, u_4 = 20 \cdot \frac{5}{4} = 25$$

và $u_1 = 37 - u_4 = 37 - 25 = 12$.

Bốn số cần tìm là 12, 16, 20, 25.

Giá trị $q = \frac{7}{9}$ không thoả mãn, vì các số u_1, u_2, u_3, u_4 không nguyên.

C. BÀI TẬP

4.1. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n-1}$.

a) Chứng minh dãy số (u_n) là cấp số nhân. Nêu nhận xét về tính tăng, giảm của dãy số ;

- b) Lập công thức truy hồi của dãy số ;
 c) Hỏi số -19683 là số hạng thứ mấy của dãy số ?

4.2. Cấp số nhân (u_n) có

$$\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$$

- a) Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân ;
 b) Hỏi tổng của bao nhiêu số hạng đầu tiên sẽ bằng 3069 ?
 c) Số $12\,288$ là số hạng thứ mấy ?

4.3. Tìm số các số hạng của cấp số nhân (u_n) , biết

- a) $q = 2, \quad u_n = 96, \quad S_n = 189$;
 b) $u_1 = 2, \quad u_n = \frac{1}{8}, \quad S_n = \frac{31}{8}$.

4.4. Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết

$$\text{a) } \begin{cases} u_5 - u_1 = 15 \\ u_4 - u_2 = 6 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} u_2 - u_4 + u_5 = 10 \\ u_3 - u_5 + u_6 = 20. \end{cases}$$

4.5. Bốn số lập thành một cấp số cộng. Lần lượt trừ mỗi số ấy cho $2, 6, 7, 2$ ta nhận được một cấp số nhân. Tìm các số đó.

4.6. Viết bốn số xen giữa các số 5 và 160 để được một cấp số nhân.

4.7. Cho dãy số (u_n) :
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$$

- a) Lập dãy số (x_n) với $x_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Chứng minh dãy số (x_n) là cấp số nhân.
 b) Tìm công thức tính x_n, u_n theo n .

4.8. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, hoặc coi là các số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một cấp số cộng. Tìm các số đó.

4.9. Cho cấp số nhân a, b, c, d . Chứng minh rằng

a) $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$;

b) $(ab + bc + cd)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$.

4.10. Giải phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, biết a, b, c, d là một cấp số nhân với công bội q .