

§4. Vi phân

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a ; b)$ và có đạo hàm tại $x \in (a ; b)$. Giả sử Δx là số gia của x sao cho $x + \Delta x \in (a ; b)$.

Tích $f'(x)\Delta x$ (hay $y' \cdot \Delta x$) được gọi là *vi phân* của hàm số $f(x)$ tại x , ứng với số gia Δx , kí hiệu là $df(x)$ hay dy .

➤ **Chú ý.** Vì $dx = \Delta x$ nên

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng

Với $|\Delta x|$ đủ nhỏ, ta có $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x_0)$ hay

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x.$$

Do đó

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \approx f(x_0) + df(x_0).$$

B. VÍ DỤ

• Ví dụ 1

Tìm vi phân của các hàm số

a) $y = \sin x - x \cos x$;

b) $y = \frac{1}{x^3}$.

Giải

a) Ta có $y' = \cos x - \cos x + x \sin x = x \sin x$,

do đó $dy = (x \sin x) dx$.

b) Vì $y' = -\frac{3}{x^4}$ nên ta có

$$dy = -\frac{3dx}{x^4}.$$

• **Ví dụ 2**

Tìm $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$.

Giải

Ta có $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{(\sin x)' dx}{(\cos x)' dx} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x \left(x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right)$.

C. BÀI TẬP

4.1. Cho hàm số

$$f(x) = x^3 - 2x + 1.$$

Hãy tính $\Delta f(1)$, $df(1)$ và so sánh chúng, nếu

- a) $\Delta x = 1$;
- b) $\Delta x = 0,1$;
- c) $\Delta x = 0,01$.

Tìm vi phân của các hàm số sau (4.2 – 4.5) :

4.2. $y = \frac{1}{x^2}$.

4.3. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

4.4. $y = \sin^2 x$.

4.5. $y = \frac{\tan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

4.6. Tìm $\frac{d(\tan x)}{d(\cot x)}$.

4.7. Chứng minh rằng vi phân dy và số gia Δy của hàm số $y = ax + b$ trùng nhau.

4.8. Chứng minh rằng với $|x|$ rất bé so với $a > 0$ ($|x| \leq a$) ta có

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0).$$

Áp dụng công thức trên, hãy tính gần đúng các số sau :

a) $\sqrt{146}$;

b) $\sqrt{34}$;

c) $\sqrt{120}$.

4.9. Tính gần đúng $\tan 44^{\circ}52'$.