

## §5. Đạo hàm cấp hai

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

Giả sử hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$ . Nếu  $f'(x)$  cũng có đạo hàm thì ta gọi đạo hàm của nó là *đạo hàm cấp hai* của  $f(x)$  và kí hiệu là  $f''(x)$  :

$$(f'(x))' = f''(x).$$

Tương tự

$$(f''(x))' = f'''(x) \text{ hoặc } f^{(3)}(x)$$

...

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x) ; n \in \mathbb{N}^*$$

ở đây kí hiệu  $f^{(0)}(x) = f(x)$  ;  $f^{(n)}(x)$  là đạo hàm cấp  $n$  của hàm số  $f(x)$ .

#### 2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai  $f''(t)$  là *gia tốc tức thời* của chuyển động  $s = f(t)$  tại thời điểm  $t$ .

### B. VÍ DỤ

#### • Ví dụ 1

Tính  $y''$ , biết rằng

$$\text{a) } y = x\sqrt{1+x^2} ;$$

$$\text{b) } y = \tan x.$$

*Giải*

$$\text{a) } y' = \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}; \text{ suy ra}$$

$$y'' = \frac{4x\sqrt{1+x^2} - \frac{x(1+2x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{4x(1+x^2) - x(1+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{b) } y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \text{ suy ra}$$

$$y'' = -\frac{(\cos^2 x)'}{\cos^4 x} = \frac{2 \cos x \sin x}{\cos^4 x}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right).$$

• **Ví dụ 2**

Cho  $f(x) = (2x - 3)^5$ . Tính  $f''(3), f'''(3)$ .

**Giải**

Ta có  $f'(x) = 5 \cdot 2 (2x - 3)^4 = 10 (2x - 3)^4$ .

$$f''(x) = 80 (2x - 3)^3;$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 240 (2x - 3)^2 = 480 (2x - 3)^2.$$

Từ đó  $f''(3) = 80 \cdot 3^3 = 2160$  ;

$$f'''(3) = 480 \cdot 3^2 = 4320.$$

**C. BÀI TẬP**

Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau (5.1 – 5.12) :

5.1.  $y = \sin 5x \cos 2x$ .

5.2.  $y = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$ .

5.3.  $y = \frac{x}{x^2-1}$ .

5.4.  $y = \frac{x+1}{x-2}$ .

5.5.  $y = x^2 \sin x$ .

5.6.  $y = x\sqrt{1+x^2}$ .

5.7.  $y = (1-x^2)\cos x$ .

5.8.  $y = \sqrt{x}$ .

5.9.  $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ .

5.10.  $y = \frac{x^2}{1-x}$ .

5.11.  $y = x \cos 2x$ .

5.12.  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

5.13. Cho hàm số  $f(x) = \sin 3x$ . Tính  $f''\left(-\frac{\pi}{2}\right), f''(0), f''\left(\frac{\pi}{18}\right)$ .

5.14. Cho hàm số  $g(t) = \cos^2 2t$ . Tính  $g'''\left(-\frac{\pi}{2}\right), g'''\left(-\frac{\pi}{24}\right), g'''\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ .